



ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 13 Ιανουαρίου 2024
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Μονάδες 7

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano.

Μονάδες 4

A3. Πότε δύο συναρτήσεις f, g θα λέμε ότι είναι ίσες ;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

(α) Αν μια συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ τότε υποχρεωτικά $f(\beta) > 0$

(β) Αν για μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει η συνεπαγωγή $f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$ για κάθε $x_1, x_2 \in A$ τότε η f είναι συνάρτηση 1-1.

(γ) Ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

(δ) Αν μια συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη τότε δεν είναι συνεχής.

(ε) Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = e^x$ στο σημείο $x_0 = 0$ είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = 1.$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = \ln x$

και $g(x) = \frac{1-x}{x+1}$

B1. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η συνάρτηση $h \circ g$ και να βρείτε τον τύπο της

$$(h \circ g)(x) = \ln \frac{1-x}{x+1}, x \in (-1, 1)$$

Μονάδες 6

Αν $f(x) = (h \circ g)(x) = \ln \frac{1-x}{x+1}, x \in (-1, 1)$

B2. (α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

Μονάδες 5

(β) Να αποδείξετε ότι $f^{-1}(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}, x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 6

B3. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της f^{-1} στο σημείο της $O(0, f(0))$

Μονάδες 4

B4. Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow -\infty} f^{-1}(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x)$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} e^x + \alpha & , x > 0 \\ x^3 + \beta x + \beta & , x \leq 0 \end{cases}$

Γ1. Να δείξετε ότι $\alpha = 0$ και $\beta = 1$

Μονάδες 6

Γ2. Ένα σημείο $M(x, y)$, με $x < 0$, κινείται πάνω στη C_f

Να δείξετε ότι τη χρονική στιγμή t_0 που το M βρίσκεται στη θέση $M_0(-1, -1)$ ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης ως προς χρόνο t είναι τετραπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του.

Μονάδες 4

Γ3. (i) Να δείξετε ότι εξίσωση $f(x) = \frac{1}{x}$ έχει μοναδική πραγματική ρίζα $\rho \in (0, +\infty)$

Μονάδες 5

(ii) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα μόνο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ με $x_0 > 0$ που η εφαπτομένη σε αυτό να διέρχεται από το $M_0(-1, -1)$

Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{f(x)} \cdot \eta\mu f(x)}{f(-x) - 2}$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : [0,4] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

- $f^2(x) + 2f(x)\sqrt{4-x} = 2(x-2)$ για κάθε $x \in [0,4]$
- ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[1,3]$

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{4-x}$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 7

Δ2. Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x) = e^{-x}$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο $M(x_0, y_0)$ και να βρείτε την σχετική τους θέση.

Μονάδες 7

Δ3. Να λύσετε την ανίσωση $f(e^{-x}) \left[\left(\sqrt{f(x)} + \sqrt{4-f(x)} \right) \right] < 2f(x) - 4$ με $x \in (2,4)$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f^{-1}(x-1)}{e^x f(x) - 1} = +\infty$

Μονάδες 5