ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΑΛΓΕΒΡΑ/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

Ημερομηνία: Σάββατο 13 Ιανουαρίου 2024
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Για οποιαδήποτε γωνία ω να αποδείξετε ότι $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$.

Μονάδες 10

Α2. Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α λέγεται άρτια;

Μονάδες 5

Α3. Για κάθε μία από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό** αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Κάθε γραμμικό σύστημα $2x2$ θα είναι είτε αδύνατο είτε θα έχει μοναδική λύση.

β) Μία συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού το σύνολο Α, λέμε ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$, αν ισχύει $f(x_0) \leq f(x)$ για κάθε $x \in A$.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με $g(x) = f(x + c), c > 0$ προκύπτει με κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης f προς τα πάνω κατά c μονάδες.

δ) Οι γωνίες που διαφέρουν κατά 180° έχουν την ίδια εφαπτομένη και συνεφαπτομένη.

ε) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sigma\upsilon\nu x, x \in \mathbb{R}$ έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Β1. α) Να αποδείξετε ότι το σύστημα $\begin{cases} 2\cdot\alpha-\beta=1 \\ -\alpha+2\cdot\beta=1 \end{cases}$ έχει μοναδική λύση την $(\alpha,\beta)=(1{,}1)$.

Μονάδες 7

β) Να αποδείξετε ότι το σύστημα $\begin{cases} 2\cdot\alpha-\beta=1 \\ -6\cdot\alpha+3\cdot\beta=-3 \end{cases}$ έχει άπειρο πλήθος λύσεων και ότι μία από αυτές είναι η $(\alpha,\beta)=(1{,}1)$.

Μονάδες 7

Β2. Για την συνάρτηση $f(x)=3\alpha\cdot\eta\mu(2\beta x)$, $x\in\mathbb{R}$ όπου α και β οι τιμές του ερωτήματος Β1.

α) Να βρείτε την ελάχιστη, την μέγιστη τιμή και την περίοδό της

Μονάδες 4

β) Να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση στο διάστημα $[0,\pi]$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\eta\mu(3\pi+x)+2\sigma\upsilon\nu(5\pi-x), x\in\mathbb{R}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=2\cdot(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)$.

Μονάδες 6

Γ2. Για τη συνάρτηση $g(x)=f(x)\cdot f(-x)$, $x\in\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι :

α) $g(x)=4(1-2\eta\mu^2 x)$

Μονάδες 5

β) Η g είναι άρτια.

Μονάδες 3

Γ3. Να βρείτε το σύνολο των τετμημένων των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)$ με την ευθεία $y = 2$ στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy.

Μονάδες 7

Γ4. Αν $x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ είναι ένας τύπος λύσεων της εξίσωσης $g(x) = 2$ να εξετάσετε αν η τιμή $x = \frac{689\cdot\pi}{6}$ προκύπτει από αυτόν.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f(x) = (3 - \alpha^2)\cdot x - 1, x \in \mathbb{R}$ $\alpha \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1, \alpha)$ και η συνάρτηση $g(x) = \frac{4\cdot x}{x^2+4}$.

Να αποδείξετε ότι:

Δ1. Η παράμετρος α είναι ίση με -2.

Μονάδες 5

Δ2. Η συνάρτηση g είναι περιττή και ότι έχει μέγιστη τιμή την 1 για $x = 2$.

Μονάδες 8

Δ3. Ισχύει ότι $f(5 - \sigma\upsilon\nu^2 x) < f(4\eta\mu x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Δ4. Οι γωνίες $\frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}$ είναι παραπληρωματικές και έπειτα να λύσετε την εξίσωση

$$g(2024)\cdot x^2 + g\left(-\eta\mu\frac{3\pi}{8}\right) + g(-2024) + g\left(\eta\mu\frac{5\pi}{8}\right) = 0.$$

Μονάδες 6