ΤΑΞΗ: **Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΑΛΓΕΒΡΑ**

Ημερομηνία: Σάββατο 11 Μαΐου 2024
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

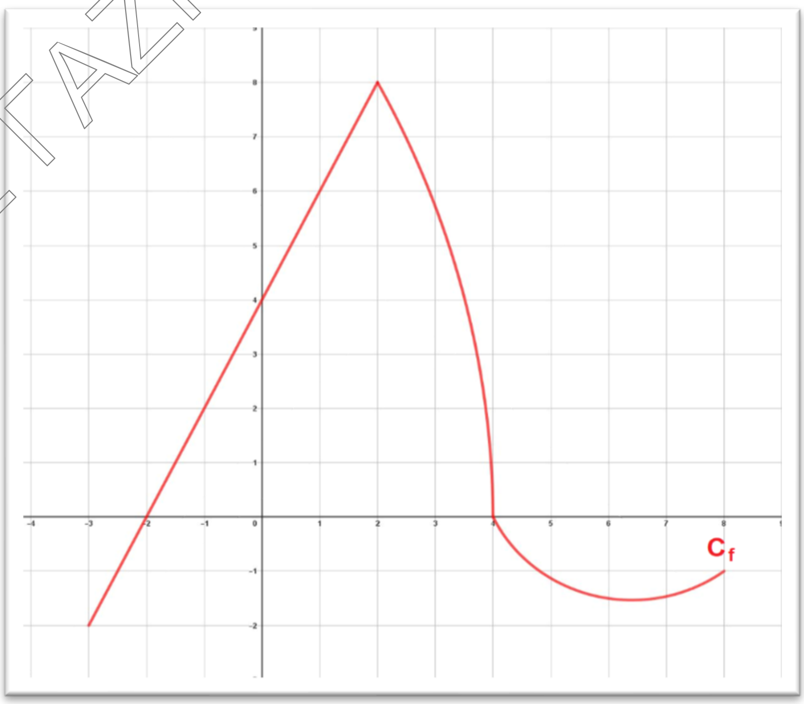
ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$ να δείξετε ότι: $x_1+x_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ και $x_1\cdot x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}$.

Μονάδες 10

Α2. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α με ένα μόνο στοιχείο της στήλης Β, ώστε να προκύπτουν σωστές ισότητες, μεταφέροντας στο τετράδιό σας τον πίνακα Ι σωστά συμπληρωμένο.

Στήλη Α	
1	$f(0)$
2	$f(4)$
3	$f(2)$
4	$f(8)$
5	$f(-3)$

Στήλη Β	
Α	8
Β	4
Γ	-2
Δ	-1
Ε	0

Πίνακας Ι

1	2	3	4	5

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Ισχύει $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2$.

β. Για κάθε $\theta\geq 0$ ισχύει $|x|\geq\theta \Leftrightarrow -\theta\leq x\leq\theta$.

γ. Η εξίσωση $x^\nu=\alpha$ με ν περιττό φυσικό αριθμό έχει πάντα λύση για κάθε $\alpha\in\Re$.

δ. Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2=\alpha\cdot\gamma$.

ε. Το συμμετρικό του σημείου $\mathrm{M}(\alpha,\beta)$ ως προς τον άξονα xx' είναι το σημείο $\mathrm{N}(-\alpha,\beta)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Β1. Να λύσετε τις ανισώσεις: $|x+1| \geq 2$ και $|2x-1| < 5$.

Μονάδες 8

Β2. Να δείξετε ότι το σύνολο των κοινών λύσεων των παραπάνω ανισώσεων είναι $[1,3)$.

Μονάδες 5

Β3. Θεωρούμε αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω που ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δύο παραπάνω ανισώσεων. Αν επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις $|\alpha_1+1| = 3$ και $\omega^3 = 8$ να βρείτε:

i) Τον πρώτο όρο α_1 και την διαφορά ω.

Μονάδες 6

ii) Τον δέκατο όρο της προόδου καθώς και το άθροισμα των δέκα πρώτων όρων της.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{-x^2+6x-5} - \kappa$, με $\kappa \in \Re$ η οποία διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(3,1)$.

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και να δείξετε ότι $\kappa = 1$.

Μονάδες 8

Γ2. Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $\mathrm{B} = \dfrac{1}{f(2)} + \dfrac{1}{f(2)+2}$ είναι ίση με $\sqrt{3}$.

Μονάδες 5

Γ3. Να λύσετε την εξίσωση $|x-1| + f(x) = -1$.

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που έχει κλίση B και διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(\mathrm{B},1)$.

Μονάδες 6

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-(2\lambda-1)\cdot x+\lambda^2-\lambda-2=0$ (1) με $\lambda\in\Re$.

Δ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ.

Μονάδες 5

Δ2. Αν x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1) τότε:

i) Να βρείτε τις παραστάσεις $S=x_1+x_2$ και $P=x_1\cdot x_2$ ως συνάρτηση του $\lambda\in\Re$

Μονάδες 4

ii) Να δείξετε ότι ισχύει $4\lambda+S^2-4\left(P-x^2+x\lambda\right)\geq-4(x-1)(\lambda+1)+4$ για κάθε $\lambda\in\Re$.

Μονάδες 6

Δ3. Για $\lambda=5$

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) γράφεται $x^2-9x+18=0$.

Μονάδες 2

ii) Να λυθεί η ανίσωση $x^2-9x+18<0$.

Μονάδες 3

iii) Αν $|\alpha|<3$ να βρεθεί το πρόσημο της παράστασης $\mathrm{K}=\alpha^2-9\cdot|\alpha|+18$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησής σας.

Μονάδες 5