ΤΑΞΗ: **Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Πέμπτη 7 Ιανουαρίου 2023
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό .

Μονάδες 7

Α2. Πότε μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ θα λέμε ότι είναι 1-1 στο Α ;

Μονάδες 3

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών .

Μονάδες 5

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ,** αν η πρόταση είναι σωστή ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

(α) Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι και 1-1.

(β) Αν το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ υπάρχει τότε η f είναι κατ΄ανάγκη παραγωγίσιμη στο x_0

(γ) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f, g για τις οποίες ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, ισχύει $f \circ g = g \circ f$.

(δ) Η συνάρτηση $f(x)=\text{συν}x$ με $x\in\mathbb{R}$ έχει μία μόνο θέση ολικού μεγίστου

(ε) Η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x, 0<\alpha\neq 1$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγό $f'(x)=\alpha^x\ln\alpha$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x}+1, x\geq 0$ και $g(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}, x\neq 2$

Β1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να αποδείξετε ότι η αντίστροφή της είναι η συνάρτηση $f^{-1}(x)=(x-1)^2, x\geq 1$

Μονάδες 7

Β2. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f^{-1} η οποία διέρχεται από το σημείο $A(0,-3)$

Μονάδες 7

Β3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g\circ g$ είναι άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων f, f^{-1}.

Μονάδες 6

Β4. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\left(g(x)\cdot \text{ημ}\left(\dfrac{1}{2x+1}\right)\right)$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f:(-\infty,1]\to\mathbb{R}$ και $g:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- $(x-1)f(x)=x^4-x^3+x^2-1$ για κάθε $x\leq 1$
- $g^2(x)=2xg(x)+3$ για κάθε $x\geq 1$
- η g έχει ελάχιστη τιμή το 3 στη θέση 1

Γ1. (α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^3+x+1, x\le 1$

Μονάδες 4

(β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και στην συνέχεια αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(-1,0)$ ώστε $f(x_0)=0$.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι $g(x)=x+\sqrt{x^2+3}, x\ge 1$

Μονάδες 6

Γ3. Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu\left(f(x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f\left(\dfrac{x_0}{2}\right)\right)^{g(x)}+f(x)$

Μονάδες 4

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(-x_0)+1}{x}+\dfrac{f(x+x_0)}{x-1}=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=e^{x-1}+1$, και

$$g:(0,+\infty)\to\mathbb{R} \text{ με } g(x)=\begin{cases} \ln x+2\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(1)-g(1-h)}{h}, & 0<x<1 \\ -\dfrac{1}{x}+3\kappa, & x\ge 1 \end{cases} \quad \text{όπου } \kappa\in\mathbb{R}$$

Δ1. (α) Να αποδείξετε $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(1)-g(1-h)}{h}=g'(1)$

Μονάδες 2

(β) Να αποδείξετε ότι $\kappa = 1$ και ότι $g(x) = \begin{cases} \ln x + 2, & 0 < x < 1 \\ -\dfrac{1}{x} + 3 & x \geq 1 \end{cases}$

Μονάδες 7

Δ2. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_g στο σημείο της $A(1, g(1))$ και να αποδείξετε ότι εφάπτεται στην C_f.

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$ ώστε $g'(x_0) = f(x_0)$

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(x) = f(x) + x$ είναι γνησίως αύξουσα και να δείξετε ότι ισχύει $e^{g(x)-1} - 2 \geq e - g(x)$ για κάθε $x \geq 1$

Μονάδες 5