ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Πέμπτη 5 Ιανουαρίου 2023
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. α) Αν Μ το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ και Ο σημείο αναφοράς στο χώρο να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$.

Μονάδες 9

β) Επιπλέον αν $A(x_1,x_2), B(x_2,y_2)$ και $M(x,y)$ να αποδείξετε ότι $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ και $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$.

Μονάδες 6

Α2. Να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό καθεμιάς από τις παρακάτω προτάσεις και δίπλα το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι σωστή, το γράμμα Λ αν η πρόταση είναι λάθος.

α) Για κάθε διάνυσμα $\vec{\alpha}$ και $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ αν ισχύει $\lambda\cdot\vec{\alpha}=\mu\cdot\vec{\alpha}$ τότε $\lambda=\mu$.

β) Ο συντελεστής διεύθυνσης λ μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1,x_2)$ και $B(x_2,y_2)$ με $x_1\neq x_2$ είναι $\lambda=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$.

γ) Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$ ισχύει πάντα $\vec{\alpha}=\vec{0}$ ή $\vec{\beta}=\vec{0}$.

δ) Οι ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $y=0$ είναι κάθετες.

ε) Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|=0$ τότε $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = 3 \cdot \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{\beta} = (5,3)$ και $\vec{\gamma}$ του επιπέδου για τα οποία ισχύει $\vec{\alpha} + 2\vec{\gamma} = \vec{\beta}$.

Β1. Να δείξετε ότι $\vec{\gamma} = (1,2)$.

Μονάδες 7

Β2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το $\mathrm{A}(-1,4)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\gamma}$.

Μονάδες 4

Β3. Αν Β, Γ είναι τα σημεία τομής της ευθείας (ε) με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες βρίσκονται

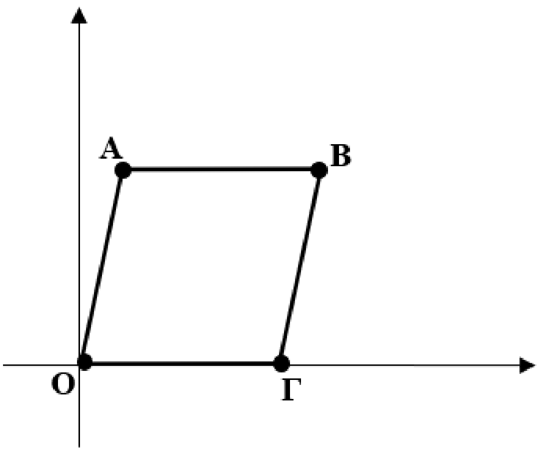
(i) η διάμεσος ΟΜ του τριγώνου ΟΒΓ .

(ii) το ύψος ΟΚ του τριγώνου ΟΒΓ .

Μονάδες 14

ΘΕΜΑ Γ

Στο σχήμα δίνεται ρόμβος ΟΑΒΓ πλευράς $4\mathrm{cm}$ και η γωνία $\hat{\Gamma\mathrm{O}\mathrm{A}} = \frac{\pi}{3}$.



Γ1. Να δείξετε ότι το σημείο Α ανήκει στην ευθεία $y = \sqrt{3} \cdot x$ και ότι οι κορυφές του ρόμβου έχουν συντεταγμένες $\mathrm{A}(2, 2\sqrt{3}), \mathrm{B}(6, 2\sqrt{3}), \Gamma(4,0)$.

Μονάδες 7

Γ2. Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου Κ του ρόμβου και τις εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες βρίσκονται οι πλευρές του.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα

i) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$,   ii) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BA}$, iii) $\overrightarrow{KA}\cdot\overrightarrow{KB}$, iv) $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AO}$

Μονάδες 6

Γ4. Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x,y)$ του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση $\overrightarrow{\Gamma M}\cdot\left(\overrightarrow{\Gamma B}-\overrightarrow{KB}\right)+\overrightarrow{OA}^2=\overrightarrow{K\Gamma}\cdot\overrightarrow{AM}$ είναι ευθεία κάθετη στην ευθεία της διαγωνίου ΑΓ.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|+2|\vec{\beta}|=5$ και τα παράλληλα διανύσματα $\vec{u}=\left(|\vec{\alpha}|,1\right),\vec{v}=\left(|\vec{\beta}|,2\right)$.

Δ1. Αποδείξτε ότι $|\vec{\alpha}|=1,|\vec{\beta}|=2$ και ότι $\vec{u}\uparrow\uparrow\vec{v}$.

Μονάδες 6

Αν επιπλέον ισχύει : $\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\perp\left(5\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\right)$

Δ2. Να αποδείξετε ότι : (i) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=1$ (ii) $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\pi}{3}$.

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y λύνοντας τις εξισώσεις

$$4 \cdot \left|2\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right| \cdot x = \sqrt{2} \cdot \left|\vec{v} - \vec{u}\right|$$

και

$$\frac{\vec{\alpha} \cdot \left(y \cdot \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}\right)}{\left|\vec{\alpha}\right| + \left|\vec{\beta}\right|} \cdot \vec{\alpha} = (1 - y) \cdot \vec{\alpha}$$

Μονάδες 8

Δ4. Αν το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι ομόρροπο του θετικού ημιάξονα $\overrightarrow{Ox}$ και το $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$ βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο να αποδείξετε ότι $\left(\widehat{\vec{\beta}, \vec{\gamma}}\right) = \frac{\pi}{12}$

Μονάδες 5