



ΤΑΞΗ: Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Σάββατο 29 Απριλίου 2023
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι, ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή αν και μόνο αν $P(\rho) = 0$.

Μονάδες 7

Α2. Για κάθε μία από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό** αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για $0 < \alpha \neq 1$ και θ_1, θ_2 θετικούς πραγματικούς αριθμούς ισχύει $\log_\alpha (\theta_1 + \theta_2) = \log_\alpha \theta_1 \cdot \log_\alpha \theta_2$.

β) Αν τα πολυώνυμα $P(x), Q(x)$ είναι n βαθμού, τότε και το πολυώνυμο $P(x) + Q(x)$ είναι πάντοτε n βαθμού.

γ) Η γραφική παράσταση της $g(x) = \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right), x \in \mathbb{R}$ προκύπτει από το γράφημα της $f(x) = \eta\mu x, x \in \mathbb{R}$ με οριζόντια μετατόπιση κατά $\frac{\pi}{3}$ μονάδες προς τα αριστερά.

- δ) Οι συναρτήσεις $f(x) = 2 \cdot \eta\mu 4x$ και $g(x) = -2 \cdot \sigma\upsilon\nu 5x$, $x \in \mathbb{R}$ έχουν την ίδια μέγιστη τιμή.
- ε) Αν η εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι γνήσια αύξουσα τότε η λογαριθμική συνάρτηση $g(x) = \log_a x$, $x \in (0, +\infty)$ είναι γνήσια φθίνουσα.

Μονάδες 10

A3. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τα παρακάτω και να συμπληρώσετε τα κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς ισότητες. Δίνονται $0 < a \neq 1$, $\theta > 0$ και $x \in \mathbb{R}$.

- α) $\ln e = \dots\dots\dots$ β) $a^{\log_a \theta} = \dots\dots\dots$
- γ) $\log_a 1 = \dots\dots\dots$ δ) $\log_a a^x = \dots\dots\dots$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - ax^3 - 3x^2 + bx - 4$.

B1. Να βρείτε τις τιμές των a, β εάν γνωρίζετε ότι το $P(x)$ έχει ρίζα το 2 και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x+1)$ είναι -12.

Μονάδες 8

Για $a = 2$ και $\beta = 8$:

B2. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

Μονάδες 10

B3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{\frac{P(x)}{x-1}}$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παράσταση:

$$A = \eta\mu^2(5\pi - x) + \sigma\upsilon\nu(3\pi + x) \cdot \sigma\upsilon\nu(4\pi - x) + 2\eta\mu^2\left(x - \frac{5\pi}{2}\right)$$

και η συνάρτηση $f(x) = A + B\sigma\upsilon\nu(\omega x)$, $x \in \mathbb{R}$ με $B < 0, \omega > 0$ η οποία έχει περίοδο π και μέγιστη τιμή 5.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης A είναι 1.

Μονάδες 4

Γ2. Να αποδείξετε ότι $\omega = 2, B = -4$ και να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)$.

Μονάδες 5

Γ3. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας $y = 3$ για $x \in [-\pi, \pi]$.

Μονάδες 5

Γ4. Στο διάστημα $[0, \pi]$

α) να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x) - 1$ και να βρείτε το πρόσημό της

Μονάδες 5

β) Να λύσετε την ανίσωση $g(x) \cdot (\pi - 4x) \cdot (x^2 - \pi x) > 0$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Στο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης

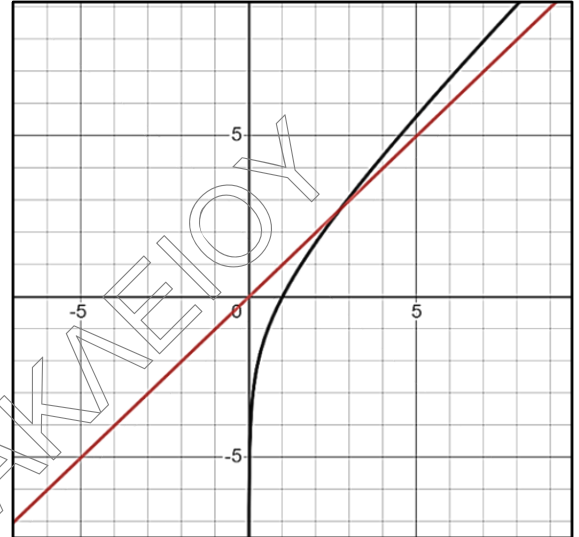
$$f(x) = \ln x + x - 1, \quad x > 0 \text{ και της ευθείας } y = x.$$

Δ1. Να βρείτε:

α) την μονοτονία της συνάρτησης f .

Μονάδες 2

β) το σημείο τομής A , της C_f και της ευθείας $y = x$



Μονάδες 3

Δ2. Αν $A(e, e)$ να αποδείξετε ότι $\ln 3 > e - 2$.

Μονάδες 6

Δ3. Να λυθεί η εξίσωση $f(e^x) = e^{3x} - e^{2x} + x, \quad x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Δ4. Να λυθεί η ανίσωση $\frac{f(x) - e}{f(x) - x + 1} < 0$

Μονάδες 7

Ευχόμαστε επιτυχία στις προαγωγικές εξετάσεις