ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 7 Ιανουαρίου 2023
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό α και β ισχύει ότι:

$$|\alpha+\beta| \le |\alpha| + |\beta|$$

Μονάδες 7

Πότε ισχύει η ισότητα στην παραπάνω σχέση;

Μονάδες 2

Α2. Έστω x ένας πραγματικός αριθμός.

Να αντιστοιχίσετε κάθε σχέση της στήλης Α με την ισοδύναμή της από την στήλη Β μεταφέροντας στο τετράδιό σας τον πίνακα 1 σωστά συμπληρωμένο.

ΣΤΗΛΗ Α Σχέση με απόλυτες τιμές	ΣΤΗΛΗ Β Σχέση με απόσταση
1. $\lvert x-1\rvert \ge 2$	α. $d(x,-2) \le 1$
2. $\lvert x+1\rvert \ge 2$	β. $d(x,2) \le 1$
3. $\lvert x-2\rvert \le 1$	γ. $d(x,-1) \ge 2$
	δ. $d(x,1) \ge 2$

Πίνακας 1		
1	2	3

Μονάδες 6

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha\cdot\beta\neq 0 \Leftrightarrow \alpha\neq 0$ *ή* $\beta\neq 0$

β. Αν $\alpha>0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε:

$$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$$

γ. Για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ ισχύει: $|\alpha|\geq\alpha$ και $|\alpha|\geq-\alpha$

δ. Για κάθε $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ με $\beta\cdot\gamma\cdot\delta\neq 0$ ισχύει η ισοδυναμία:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$$

ε. Ισχύει ότι: $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)\cdot(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Β1. Να γράψετε την παράσταση $\alpha=-|\pi-3|+|\sqrt{8}-\pi|-|4-\sqrt{8}|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

Μονάδες 8

Β2. Να λύσετε την εξίσωση $\beta^3-64=0$

Μονάδες 5

Για $\alpha=-1$ και $\beta=4$.

Β3. Αν $x\in(\alpha,\beta)$ να δείξετε ότι η παράσταση $\mathrm{A}=|x+1|+|x-4|$ είναι ανεξάρτητη του x.

Μονάδες 7

Β4. Για $\mathrm{A}=5$ να λυθεί η εξίσωση: $|x-\mathrm{A}|=10$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση $\lambda^2(x-1)=2(2x-\lambda)$ με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$(\lambda-2)(\lambda+2)x=\lambda(\lambda-2) \quad (1)$$

Μονάδες 5

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση (1) για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}$

Μονάδες 6

Γ3. Αν $\lambda=2$ να λύσετε την εξίσωση $\left||x-\lambda|-\lambda^2\right|=\left|\lambda-|\lambda-x|\right|$

Μονάδες 8

Γ4. Αν $x_0=\dfrac{\lambda}{\lambda+2}$ η μοναδική λύση της εξίσωσης (1) για κάθε $\lambda\neq 2$ και $\lambda\neq -2$ να βρείτε το λ ώστε $x_0=\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2-\sqrt{2}}$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$\alpha)$ $\dfrac{3\alpha}{\alpha^2-1}=\dfrac{2\alpha-1}{\alpha+1}-\dfrac{\alpha-3}{\alpha-1}$

$\beta)$ $\sqrt{\beta^2-8\beta+16}+\left|\beta^2-16\right|=0$

Μονάδες 8

Δ2. Να βρείτε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων γ και δ

$\alpha)$ $\gamma = \dfrac{\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[3]{16}}{2 \cdot \sqrt[12]{2}}$

$\beta)$ $\delta = \left(\dfrac{\sqrt{27} + \sqrt{18}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \right)^2$

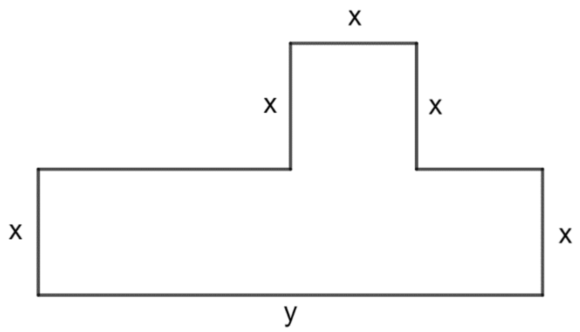
Μονάδες 8

Για $\alpha = 2$, $\beta = 4$, $\gamma = 2$ και $\delta = 9$

Δ3. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύει ότι: $\alpha \le x \le \beta$ και $\gamma \le y \le \delta$

i) να εκφράσετε την περίμετρο Π και το εμβαδόν E του παρακάτω σχήματος ως συνάρτηση των x και y

Μονάδες 4



ii) Αν $\Pi = 4x + 2y$ και $E = x^2 + xy$ να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκεται η περίμετρος και το εμβαδόν.

Μονάδες 5