

ΤΑΞΗ: Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ  
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τετάρτη 27 Απριλίου 2022  
Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

### ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

#### Θέμα Α

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο  $x_0$ , στο οποίο όμως η  $f$  είναι συνεχής. Αν η  $f'(x)$  διατηρεί πρόσημο στο  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , τότε το  $f(x_0)$  δεν είναι τοπικό ακρότατο και η  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $(\alpha, \beta)$ .

Μονάδες 7

**A2.** Να διατυπώσετε το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού.

Μονάδες 4

**A2.** Πότε η ευθεία  $y = \lambda x + \beta$  λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης  $f$ , όταν  $x \rightarrow +\infty$ .

Μονάδες 4

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Αν  $f, g, h$  είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η  $ho(gof)$ , τότε ορίζεται και η  $(hog)of$  και ισχύει  $ho(gof) = (hog)of$

**β)** Αν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x))$  τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  στο  $x_0$ .

**γ)** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και υπάρχει  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο ώστε  $f(x_0) = 0$ , τότε ισχύει πάντα  $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ .

**δ)** Αν μια συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει ολικό μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα.

ε) Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι συνεχείς στο  $[\alpha, \beta]$  και ισχύει  $f(x) \leq g(x)$  για κάθε

$$x \in [\alpha, \beta] \text{ τότε } \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx \leq \int_{\beta}^{\alpha} g(x) dx.$$

Μονάδες 10

**Θέμα Β**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $\varphi(x) = \frac{e^x}{x}$ ,  $x \neq 0$  και  $g(x) = \ln x$ ,  $x > 0$

**B1.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $f = \varphi \circ g$ .

Μονάδες 4

➤ Αν  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ ,  $0 < x \neq 1$ , τότε

**B2.** Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την  $f$  και να βρείτε τα ακρότατα.

Μονάδες 5

**B3.** Να μελετήσετε την κυρτότητα της  $f$  και να βρείτε τα σημεία καμψής της γραφικής της παράστασης.

Μονάδες 8

**B4.** Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$  και να τη σχεδιάσετε.

Μονάδες 8

**Θέμα Γ**

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \varepsilon\phi x + \alpha, & -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ \ln(x+1) + 1 + \beta, & x \geq 0 \end{cases}$

όπου  $\alpha, \beta$  ακέραιοι για την οποία ισχύει το θεώρημα του Bolzano στο  $\left[-\frac{\pi}{4}, e-1\right]$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 0$  και  $\beta = -1$ .

Μονάδες 6

**Γ2.** Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του  $\lambda > 0$  ώστε να ισχύει

$$f(x) \leq \frac{x^2 - x}{2} + \ln \lambda, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{e-1} f(x) dx$ .

Μονάδες 8

Γ4. Ένα κινητό  $M(\alpha, f(\alpha))$  με  $\alpha > 0$  κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \ln(x+1)$ ,  $x > 0$  έτσι ώστε η τετμημένη του να μεταβάλλεται με ρυθμό  $1 \text{ cm/sec}$ . Αν  $(\varepsilon)$  είναι η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $M$  και  $\theta$  η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$ , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας  $\theta$ , τη χρονική στιγμή  $t_0$  που η τετμημένη του  $M$  είναι ίση με  $\sqrt{3} - 1 \text{ cm}$ .

Μονάδες 5

**Θέμα Δ**

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = e^x - ax$ , όπου  $a, x \in \mathbb{R}$ .

Δ1. Αν  $f(x) \geq 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να βρείτε την τιμή του  $a$ .

Μονάδες 5

➤ Για την τιμή  $a=1$

Δ2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , την εφαπτομένη της στο σημείο  $M(1, e-1)$  και τον άξονα  $y'y$ .

Μονάδες 6

Δ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = \ln \frac{e^x}{e^x - x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $g$  έχει δύο σημεία καμπής, έστω

$A(x_1, g(x_1))$  και  $B(x_2, g(x_2))$  με  $x_1 < x_2$ .

Μονάδες 8

Δ4. Για τη συνάρτηση  $g$  του ερωτήματος Δ3, να αποδείξετε ότι υπάρχουν  $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$

με  $\xi_1 < \xi_2$  τέτοιοι ώστε να ισχύει:  $(1 - x_1) \cdot g'(\xi_1) > (x_2 - 1) \cdot g'(\xi_2)$ .

Μονάδες 6

**Καλή επιτυχία**