



ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Μ. Τετάρτη 20 Απριλίου 2022
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ε του κύκλου $C: x^2 + y^2 = \rho^2$ σε ένα σημείο του $M(x_1, y_1)$ είναι $\varepsilon: xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

Μονάδες 7

Α2. Τι ονομάζουμε παραβολή με διευθετούσα ευθεία δ και εστία E σημείο εκτός της δ ;

Μονάδες 4

Α3. Δίνεται ο παρακάτω ισχυρισμός:

«Τα σημεία της παραβολής $x^2 = 2py$ με $p < 0$ και $y \neq 0$ βρίσκονται στο 1^ο και 2^ο τεταρτημόριο του καρτεσιανού συστήματος αξόνων xOy ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως Σωστό ή Λάθος.

Μονάδες 1

β) Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 3

- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
1. Η ευθεία με εξίσωση $A \cdot x + B \cdot y + \Gamma = 0$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\eta} = (A, B)$.
 2. Αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ τότε για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ θα ισχύει υποχρεωτικά $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$.
 3. Η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ έχει εφαπτομένη στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ την ευθεία $\frac{yy_1}{a^2} + \frac{xx_1}{\beta^2} = 1$.
 4. Η υπερβολή $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y = \frac{\beta}{a}x$ και $y = -\frac{\beta}{a}x$.
 5. Η εξίσωση $x^2 + y^2 + \Gamma = 0$ παριστάνει κύκλο αν και μόνο αν $\Gamma < 0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν $|\vec{\alpha}| = \sqrt{3}$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 120^\circ$, $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) = -3$ και η παραβολή $y^2 = -4\vec{\alpha}\vec{\beta} \cdot x$.

B1. α) Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -3$ και $|\vec{\beta}| = 2 \cdot \sqrt{3}$.

Μονάδες 4

β) Να αποδείξετε ότι η εστία της παραβολής είναι το σημείο $E(3,0)$ και να βρείτε την εξίσωση της διευθετούσας δ.

Μονάδες 4

B2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε της παραβολής στο σημείο της $A(1, 2\sqrt{3})$ καθώς και την γωνία που αυτή σχηματίζει με τον $x'x$ άξονα.

Μονάδες 6

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2022
Β' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ2Θ(ε)

- B3.** Αν B είναι το σημείο τομής της εφαπτομένης ε με τον άξονα $x'x$ να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AEB είναι ισόπλευρο.

Μονάδες 4

- B4.** Να δείξετε ότι $\varepsilon \parallel GE$ όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας OA και της διευθετούσας δ .

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 3x - y - 1 = 0$, $\varepsilon_2: 2x + y + 6 = 0$ και το τρίγωνο $K\Lambda M$ όπου K το σημείο τομής των ε_1 , ε_2 και Λ , M τα συμμετρικά σημεία του K ως προς τον $x'x$ και $y'y$ άξονα αντίστοιχα.

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι $K(-1, -4)$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΛM και να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $K\Lambda M$.

Μονάδες 6

- Γ2.** Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2 .

Μονάδες 6

- Γ3.** Αν Γ είναι το σημείο τομής της ε_2 με τον $x'x$, να βρείτε σημείο A της ε_1 ώστε τα σημεία Γ , Λ και A να είναι συνευθειακά.

Μονάδες 7

- Γ4.** Αν $M(x, y)$ σημείο της ευθείας ε_1 ή της ε_2 να αποδείξετε ότι ισχύει $6x^2 - y^2 + xy + 16x - 7y - 6 = 0$.

Μονάδες 6

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2022
Β' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ2Θ(ε)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + (\lambda + 6)x + (3\lambda + 4)y + 3 - \lambda = 0$ (1).

Δ1. Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda \neq -2$, να βρείτε το κέντρο, την ακτίνα και να αποδείξετε ότι το σημείο $A(-2,1)$ είναι κοινό σημείο όλων των κύκλων της μορφής (1).

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων που ορίζονται από την εξίσωση (1) είναι τα σημεία της ευθείας $y = 3x + 7$ εκτός του σημείου της A.

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C_1 που ορίζει η εξίσωση (1), ο οποίος εφάπτεται στην ευθεία $\zeta: y = -\frac{1}{3}x + 7$.

Μονάδες 7

Δ4. Να βρείτε τα σημεία του άξονα $x'x$ των οποίων η μέγιστη απόσταση από τον κύκλο C_1 είναι μεγαλύτερη από $5 + \sqrt{10}$.

Μονάδες 6

Ευχόμαστε επιτυχία!