

ΤΑΞΗ: Α' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 7 Μαΐου 2022

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ και $\Delta > 0$ να αποδείξετε ότι:

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Μονάδες 15

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i) Το συμμετρικό του σημείου $A(\alpha, \beta)$ ως προς τον άξονα yy' είναι το $A'(\alpha, -\beta)$

ii) Αν στο τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, με $\alpha \neq 0$ οι αριθμοί α, γ είναι ετερόσημοι, τότε αυτό έχει 2 ρίζες πραγματικές και άνισες.

iii) Αν $|x| < \theta$ με $\theta > 0$ τότε ισχύει $x > \theta$ ή $x < -\theta$.

iv) Το άθροισμα n πρώτων όρων αριθμητικής προόδου δίνεται από τον τύπο

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)\omega]$$

v) Η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $(3, 5)$ αν ισχύει $f(3) = 5$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ και $B = \sqrt{2 + \sqrt[4]{13 + \sqrt[3]{27}}}$

B1. Να δείξετε ότι $A=4$ και $B=2$.

Μονάδες 6

B2. Να δείξετε ότι το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $\frac{|3-x|-2}{A} - \frac{|2x-6|-3}{B} > -2$ (1) είναι το $\Delta = (-1, 7)$.

Μονάδες 7

B3. Αν οι μη μηδενικές ακέραιες λύσεις α_1, α_2 της ανίσωσης (1) που είναι πολλαπλάσια του 3, με $\alpha_1 < \alpha_2$, αποτελούν όρους γεωμετρικής προόδου με α_1, α_2 αντίστοιχα τον πρώτο και δεύτερο όρο, τότε να βρείτε τον 6^ο όρο της προόδου.

Μονάδες 5

B4. Να απλοποιήσετε την παράσταση $\Gamma = |x+4| - 2|x-8|$ αν το x ανήκει στο διάστημα των λύσεων της ανίσωσης (1).

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - \alpha x + \beta}{|x+1| - 2}$

G1. Να βρείτε τον θετικό αριθμό α αν ισχύει $(\alpha-1)^4 - 81 = 0$

Μονάδες 5

Γ2. Για $\alpha=4$ αν γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το $A(-1,-4)$, τότε να δείξετε ότι το $\beta=3$.

Μονάδες 5

Γ3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και κατόπιν για $x>1$ να αποδείξετε ότι $f(x) = x - 3$

Μονάδες 8

Γ4. Να λύσετε την ανίσωση $f(5) \cdot x^2 - f(6) \cdot x + 1 \leq 0$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (2\lambda - 1)x + \lambda(\lambda - 2) = 0$ (1)

Δ1. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η εξίσωση (1) να έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες x_1, x_2 .

Μονάδες 5

Δ2. Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης (1) για $\lambda=1$

α) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις $S = x_1 + x_2$, $P = x_1 \cdot x_2$, $A = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

Μονάδες 7

β) Να βρείτε την εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει για λύσεις τους αριθμούς $\rho_1 = x_1 + \frac{1}{x_1}$, $\rho_2 = x_2 + \frac{1}{x_2}$

Μονάδες 7

Δ3. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η ανίσωση $x^2 - (2\lambda - 1)x + \lambda(\lambda - 2) > 0$ να αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 6