



ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Παρασκευή 7 Ιανουαρίου 2022

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν $\alpha, \beta \geq 0$ να αποδείξετε ότι $\sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha \cdot \beta}$ όπου n θετικός ακέραιος.

Μονάδες 6

A2. Έστω η εξίσωση $x^n = \alpha$ (1) με $\alpha \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α με ένα μόνο στοιχείο της στήλης Β, ώστε να προκύπτουν αληθείς προτάσεις.

A	B
1. Αν $\alpha > 0$ και n περιττός τότε η (1)	α. Έχει ακριβώς μία λύση την $-\sqrt[n]{ \alpha }$
2. Αν $\alpha > 0$ και n άρτιος τότε η (1)	β. Έχει ακριβώς μία λύση την $\sqrt[n]{\alpha}$
3. Αν $\alpha < 0$ και n περιττός τότε η (1)	γ. Έχει ακριβώς δύο λύσεις τις $\sqrt[n]{\alpha}, -\sqrt[n]{\alpha}$

Μονάδες 9

- A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α.** Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ έχουμε $|\alpha| \geq \alpha$ και $|\alpha| \leq -\alpha$.
- β.** Ισχύει ότι $d(\alpha, \beta) = |\beta - \alpha|$.
- γ.** Για κάθε $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ ισχύει $(\alpha > \beta \text{ και } \gamma > \delta) \Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$.
- δ.** Η ισότητα $|x| = x$ ισχύει μόνο για $x > 0$.
- ε.** Η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$ έχει ακριβώς μία λύση όταν $\alpha \neq 0$.

Μονάδες 10**ΘΕΜΑ Β**

Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x και y με την ιδιότητα $2 < x < 5$ και $3 < y < 6$:

- B1.** Να γράψετε τις παραστάσεις $A = |x - 2| - |x - 6|$ και $B = |y - 6| - |3 - y|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

Μονάδες 9

- B2.** Αν $A = 2x - 8$ και $B = -2y + 9$ να δείξετε ότι $-7 < A + B < 5$

Μονάδες 10

B3. Να αποδείξετε ότι η παράσταση $\Gamma = \frac{\sqrt{4-4x+x^2}}{x-2} + \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x|}{x}$ είναι ανεξάρτητη του x .

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση $\lambda^2 x - 2(2x - 1) = 2(\lambda - 1)^2$ **(1)** όπου λ πραγματικός αριθμός.

Γ1.

- i. Να δείξετε με κατάλληλες πράξεις ότι η εξίσωση **(1)** γράφεται στην μορφή $(\lambda - 2)(\lambda + 2)x = 2\lambda(\lambda - 2)$.

Μονάδες 6

- ii. Να βρεθεί για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση **(1)** είναι αόριστη .

Μονάδες 7

Γ2. Να βρείτε την θετική λύση κ της εξίσωσης

$$(\kappa - 1)^4 = \sqrt{81} \cdot \sqrt{\sqrt{86} - \sqrt{5}} \cdot \sqrt{\sqrt{86} + \sqrt{5}}$$

Μονάδες 6

Γ3. Αν $\kappa=4$ και ισχύει η σχέση $(\alpha - \kappa)(\kappa - \beta) > 0$ να δείξετε ότι το κ είναι μεταξύ των α και β .

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παράσταση $\alpha = \frac{1}{4+2\sqrt{3}} + \frac{1}{4-2\sqrt{3}}$ και η ισότητα

$$\beta^2 - 6\beta + 9 + \gamma^2 - 8\gamma + 16 = 0$$

Δ1. Να βρείτε τις τιμές των α, β, γ .

Μονάδες 9

Δ2. Αν $\alpha=2, \beta=3, \gamma=4$ να λυθεί η εξίσωση $\alpha \frac{x^2+7x}{x^2-1} = \frac{2x-1}{x+1} + \frac{\beta}{1-x}$.

Μονάδες 9

Δ3. Αν $\kappa = \frac{(x-1)^2 - \gamma|x-1| + \gamma}{|x-1| + 2}$ τότε να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση κ και στην συνέχεια να την απλοποιήσετε.

Μονάδες 7