Ενδεικτικές Απαντήσεις :

ΘΕΜΑ Α
Α1. Σχολικό σελ. 111
Α2. Σχολικό σελ. 104
Α3. Σχολικό σελ. 128
Α4. α.Λ **β.**Λ **γ.**Λ **δ.**Σ **ε.**Σ

ΘΕΜΑ Β
Β1. Ισχύει ότι $A_h = (0,+\infty)$, $A_g = R$.Πρώτα υπολογίζουμε το πεδίο ορισμού της f : $x \in A_h$ $και$ $h(x) \in A_g$ δηλαδή $x > 0$ $και$ $lnx \in R$. Οπότε $A_f = (0,+\infty)$.

Άρα, $f(x) = \frac{4-e^{2lnx}}{e^{lnx}} = \frac{4-e^{lnx^2}}{lnx} = \frac{4-x^2}{x}$, $x > 0$.

Β2. (i) $f'(x) = -\frac{x^2+4}{x^2} < 0$, άρα $f \downarrow$.

(ii) $\frac{4-\pi^2}{4-e^2} > \frac{\pi}{e}$, ισχύει ότι $4 - e^2 < 0$ & $e > 0$, άρα η ανίσωση γίνεται :

$(4-\pi^2)\cdot e < (4-e^2)\cdot\pi \Leftrightarrow \frac{4-\pi^2}{\pi} < \frac{4-e^2}{e} \Leftrightarrow f(\pi) < f(e) \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} \pi > e$,που ισχύει .

Β3. Έχουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη την **x=0**, διότι : $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x}\cdot(4-x^2) = +\infty$.

Επίσης , έχουμε πλάγια ασύμπτωτη την **y=-x**, διότι : $\lambda = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4-x^2}{x^2} = -1$ και $\beta = \lim_{x\to+\infty}(f(x)+x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4-x^2+x^2}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x} = 0$.

Β4. Ισχύει ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x} = -\infty$, οπότε $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)} = 0$. Οπότε , το ζητούμενο όριο θα λυθεί με κριτήριο παρεμβολής.

$\left|\frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)}\right| = \frac{|\sigma\upsilon\nu(1+x^2)|}{|f(x)|} \le \frac{1}{|f(x)|}$, οπότε $-\frac{1}{|f(x)|} \le \frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)} \le \frac{1}{|f(x)|}$

$\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{|f(x)|} = 0 = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{|f(x)|}$, οπότε από Κριτήριο Παρεμβολής , $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)} = 0$.

ΘΕΜΑ Γ
Γ1. Ισχύει ότι $\int_2^3 xf(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_2^3 x(\frac{1}{x}+a)dx = 1 \Leftrightarrow \int_2^3(1+ax)dx = 1 \Leftrightarrow \left[x+\frac{ax^2}{2}\right]_2^3 = 1 \Leftrightarrow$ α=0.

Γ2 . Για να ορίζετε η εφαπτομένη αρκεί να υπάρχει η παράγωγος για x=1 .

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{x^2-3x+3-1}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = -1$$
.

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{-(x-1)}{x(x-1)} = -1 .$$

Άρα f ‘(1)=1 .
Επομένως ορίζεται η εφαπτομένη στο (1 ,f(1)) .

ii) y – f(1) = f ‘(1)(x-1) ↔ y-1 = -1 (x-1) ↔ y= -x+2 .

εφω = -1 άρα ω= 135^o .

Γ3. Για x < 1 : $f'(x) = 2x - 3$.
Για $x \geq 1$ $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$

Για x ≥1 έχω $f'(x) = \frac{-1}{x^2} < 0$. Άρα για $x \in (1, +\infty)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα f 1-1 στο $(1, +\infty)$.

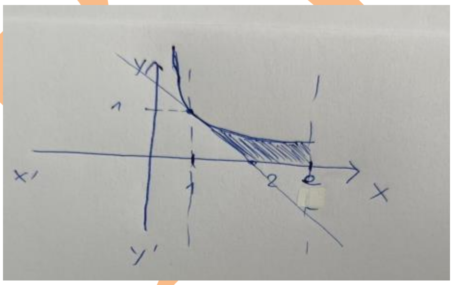
Για x <1 έχω $f'(x) = 2x - 3 < 0$. Άρα για $x \in (-\infty , 1)$ η είναι γνησίως φθίνουσα άρα f 1-1 στο $(-\infty , 1)$.

Αν $x_1 \neq x_2$ με $x_1 < 1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(1) = 1 > f(x_2)$ Επομένως : $f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Άρα η f είναι 1-1 σε όλο το πεδίο ορισμού της .
f συνεχής στο $(-\infty , 1)$ και f γνησίως φθίνουσα αρα το πεδίο τιμών το υπολογίζω από :$f\big((-\infty, 1)\big)$ = $\Big(\lim_{x\to 1} f(x)$, $\lim_{x\to -\infty} f(x)\Big)$=$(1, +\infty)$.
f συνεχής στο [1 ,+∞) και f γνησίως φθίνουσα άρα ομοίως το πεδίο ορισμού f ([1,+∞)) =($\lim_{x\to +\infty} f(x)$, $f(1)$) =(0,1] .

Επομένως $f(A)$ = $(0, +\infty)$.

Γ4.



E=$\int_1^e f(x)dx - (ΑΒΓ) = \int_1^e \frac{1}{x}dx - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = [lnx]_1^e - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $τ.μ.$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω $g(x)=\frac{f(x)-2x}{x-1}$, $x\neq 1$.Τότε $\lim_{x\to 1} g(x)=l\in R$. Άρα, υπολογίζουμε $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}(g(x)(x-1)+2x)=0+2=2$(**1**). Όμως, $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\left(\ln(2-x)-\frac{1}{x}+k\right)=ln1-1+k=k-1$(**2**) . Από (1),(2) k=3 και $f(x)=\ln(2-x)-\frac{1}{x}+3, x\in(0,2)$.

Δ2. Ισχύει ότι $f'(x)=\frac{x^2+x-2}{x^2(x-2)}$, $x\in(0,2)$. Λύνουμε $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=-2(απορ.)$

Άρα βρίσκουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο [0,1] και γνησίως φθίνουσα στο [1,2) και f(1)=2.
Θα βρούμε Σύνολο Τιμών για την f στα $A_1=(0,1]\ με\ f\uparrow$, $A_2=[1,2)\ με\ f\downarrow$.
$f(A_1)=(\lim_{x\to 0^+} f(x), f(1)]=(-\infty,2]$, $διότι$: $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\ln(2-x)-\frac{1}{x}+3\right)=-\infty$ ($\lim_{x\to 0^+}\ln(2-x)=ln2$ & $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=0$). Το $0\in f(A_1)$, άρα έχουμε μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0,1] και λόγω μονοτονίας, μοναδικό.
$f(A_2)=\left(\lim_{x\to 2^-} f(x), f(1)\right]=(-\infty,2]$, διότι :
$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(\ln(2-x)-\frac{1}{x}+3\right)=-\infty$ ($\lim_{x\to 2^-}\ln(2-x)=\lim_{u\to 0^+} lnu=-\infty$ & $\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$) . Το $0\in f(A_2)$, άρα έχουμε μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα [1,2) και λόγω μονοτονίας, μοναδικό.
Άρα έχουμε ακριβώς δυο ρίζες.
Έστω ότι $1>x_1>\frac{1}{3}$ τότε $f\uparrow(0,1)$, $οπότε\ f(x_1)>f(\frac{1}{3})\Leftrightarrow 0>ln\frac{5}{3}$ $άτοπο$.

Δ3. Εφαρμόζουμε ΘΜΤ για την f στο $(x_1,\frac{1}{3})$ και έχουμε ως αποτέλεσμα ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ$\in(x_1,\frac{1}{3})$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\frac{f(\frac{1}{3})}{\frac{1}{3}-x_1}=\frac{3f(\frac{1}{3})}{1-3x_1}$.

Δ4 .Έχω H(x) = $x_1F(x)+x_2G(x)-x_1-x_2+2x$,H συνεχής στο $[x_1,x_2]$

$H(x_1)=x_1F(x_1)+x_2G(x_2)-x_1-x_2+2x_2=x_2G(x_2)+x_1-x_2$

$H(x_2)=x_1F(x_2)+x_2G(x_2)-x_1-x_2+2x_2=x_1F(x_2)-x_1+x_2=-x_1G(x_1)-x_1+x_2=-H(x_1)$.

$H(x_1)\ H(x_2)=-\left(H(x_1)\right)^2\leq 0$.

Αν H$(x_1)\neq 0$ από θεώρημα Bolzano η H έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (x_1, x_2) .

Και $H'(x) = x_1 f(x) + x_2 f(x) + 2 = f(x)(x_1 + x_2) + 2 > 0$ άρα Η είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_1, x_2]$.

$x_1 < x < 1 < x_2 \Rightarrow 0 = f(x_1) < f(x)$ και $f(x) > f(x_2) = 0$.

Οπότε έχει μοναδική λύση στο (x_1, x_2).

Αν $H(x_1) = 0 \Leftrightarrow x_2\, G(x_1) + x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow G(x_1) = \frac{x_2 - x_1}{x_2}$.

$$H(x_2) = -H(x_1) = 0 \Leftrightarrow x_1 F(x_2) - x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow H(x_2) = -H(x_1) = 0$$
$$\Leftrightarrow x_1 F(x_2) - x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow F(x_2) = \frac{x_1 - x_2}{x_1}$$

Τότε $F(x_2) + G(x_1) = 0 \Leftrightarrow \frac{x_1 - x_2}{x_1} + \frac{x_2 - x_1}{x_2} = 0$

$\Leftrightarrow x_1 x_2 - x_2^2 + x_1 x_2 - x_1^2 = 0 \Leftrightarrow \; -(x_1^2 - 2\, x_1\, x_2 + x_2\ )^2 = 0$

$\Leftrightarrow \; -(x_1 + x_2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_{1=}\, x_2$ άτοπο.

<u>Επιμέλεια:</u>

Αντώνης Μαλλιαράκης
Ρένια Φαρσάρη
Δήμητρα Δασκαλάκη
Μπλεόνα Σκεντέρι