ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ’ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 06/06/2022

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό Βιβλίο Σελ.186
Α2. Σχολικό Βιβλίο Σελ.142
Α3. Σχολικό Βιβλίο Σελ.161
Α4. α) Σ β) Σ γ) Σ δ) Λ ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Ισχύει ότι : $x \in A_g$ και $\mathrm{g(x)} \in A_f$, δηλαδή $x \geq 0$ *και* $x \leq 1$. *Άρα* $A_h = [0,1]$, *με* $\mathrm{h(x)} = (\mathrm{fog})(\mathrm{x}) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$.

Β2. $\mathrm{h}'(\mathrm{x}) = 2\mathrm{x} - 2 < 0$ *για* $x \in [0,1]$, οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα, 1-1 και αντιστρέψιμη. Υπολογίζουμε Σύνολο Τιμών της h που είναι το Πεδίο Ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης.
$A_{h^{-1}} = \mathrm{f}(A_h) = [h(1), h(0)] = [0,1]$. Ισχύει $h(x) = y \Leftrightarrow (x-1)^2 = y \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{y}$. Οπότε , $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}, x \in [0,1]$.

Β3.

i. Αρκεί να δείξουμε ότι η φ είναι συνεχής στο [0,1] και $\varphi(0) \neq \varphi(1)$. Η φ είναι συνεχής στο [0,1] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Ελέγχουμε για x=1, $\lim_{x\to 1-} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x\to 1-} \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt{x})} = \cdots = \frac{1}{2} = \varphi(1)$. Άρα φ συνεχής στο 1. Επίσης, φ(0)=1 και φ(1)=$\frac{1}{2}$, οπότε ισχύει το Θ.Ε.Τ. και υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = \eta$, με $\eta \in (\frac{1}{2}, 1)$.

ii. $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2} => \eta\mu\frac{\pi}{6} < \eta\mu\alpha < \eta\mu\frac{\pi}{2}$, διότι ημα γνησίως αύξουσα και α$\in (0,\frac{\pi}{2})$. Οπότε, $\frac{1}{2} < \eta\mu\alpha < 1$. Άρα από Θ.Ε.Τ. υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = \eta\mu\alpha$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Ισχύει ότι η f έχει την μορφή $f(x)=\begin{cases}-2x+c1, x<-1\\ x^3-x+c2, x>-1\end{cases}$

Όμως f(0)=0 άρα c2=0 άρα $f(x)=x^3-x, x>-1$

Επιπλέον f συνεχής στο R άρα θα ισχύει

$$\lim_{x\to -1-} f(x)=\lim_{x\to -1+} f(x)=f(-1)$$

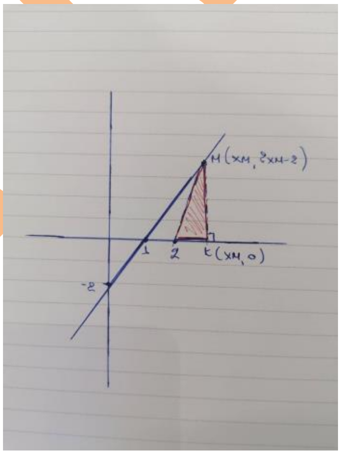
$$\lim_{x\to -1+}(x^3-x)=0, άραf(-1)=0\ και\ \lim_{x\to -1-}(-2x+c2)=0 \Leftrightarrow c2=-2$$

Τελικά, $f(x)=-2x-2, x\le -1 και f(x)=x^3-x, x>-1$

Γ2. Η εφαπτομένη για x0>-1 έχει την μορφή $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$, η οποία τέμνει τον y'y στο (0,-2), οπότε $-2-f(x_0)=f'(x_0)(0-x_0)$ ⇔ …⇔ $x_0=1$. Άρα , η εφαπτομένη γίνεται $y-f(1)=f'(1)(x-1)$ ⇔ $y=2x-2$.

Γ3.

Τα σημεία τομής της ε με x'x άξονα είναι το (1,0) και με y'y άξονα είναι το (0,-2)



Έστω M(x,y),με $y(t)=2x(t)-2, x(t_0)=3, y(t_0)=4, x'(t_0)=2, E'(t_0)=;$

$E(t)=\frac{[(x(t)-2)y(t)]}{2}=\frac{[(x(t)-2)(2x(t)-2)]}{2}=[2x^2(t)-6x(t)+4]/2, E'(t)=\frac{4x(t)x\prime(t)-6x\prime(t)}{2}$

Άρα, $E'(t_0)=\frac{4*3*2-6*2}{2}=6\,μον/sec.$

Γ4. $\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\frac{f(-x)}{1-x^3}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu(-2x-2)}{-2x-2}+\frac{2x-2}{1-x^3}\right]=0,\ \ \delta\iota\acute{o}\tau\iota$

- Θέτω $u=-2x-2, o\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ u_0=\lim_{x\to-\infty}(-2x-2)=+\infty.$ $Ά\rho\alpha,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu u}{u}=0$(από κριτήριο παρεμβολής)
- $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-2}{1-x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x^3}=0$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

i. f συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων. Επίσης, f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Ισχύει ότι $f'(x)=\frac{x-1}{x}$ και $f'(x)>0\ \gamma\iota\alpha\ x\in[1,+\infty), f'(x)<0\ \gamma\iota\alpha\ x\in(0,1]$.Οπότε η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο f(1)=1-ln3<0. Ακόμη , $\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}(x-\ln(3x))=0-(-\infty)=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x\left(1-\frac{ln3x}{x}\right)=+\infty(1-0)=+\infty, \delta\iota\acute{o}\tau\iota\ \lim_{x\to+\infty}\frac{ln3x}{x}=0(\alpha\pi o\ DLH).$ Βρίσκουμε Σύνολο Τιμών για την f : f συνεχής και μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα (0,1] και $[1,+\infty)$, οπότε $f\big((0,1]\big)=[1-ln3,+\infty), f\big((1,+\infty)\big)=(1-ln3,+\infty)$. Το 0 ανήκει σε καθένα από τα δύο διαστήματα, και λόγω μονοτονίας, η f έχει ακριβώς δύο ρίζες.

ii. $f''(x)=\frac{1}{x^2}>0, ά\rho\alpha\ f\ \kappa\upsilon\rho\tau\acute{\eta}\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\alpha\theta\varepsilon\ x>0.$

Δ2. Ισχύει ότι : $x_1<x<1$ => (f↓) $f(x_1)>f(x)$ και $1<x<x_2$=> (f↑) f (x)<f($x_2)=0$. Οπότε , f(x)<0 για $x\in[x_1,x_2]$. Άρα, $E=-\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx=-\int_{x_1}^{x_2}(x-ln3x)dx=-\int_{x_1}^{x_2}xdx+\int_{x_1}^{x_2}ln3xdx=-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2}+[xln3x]_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}x\frac{3}{3x}dx=\dots=\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_2+x_1-2)$

$\boldsymbol{f(x_1)=0\Leftrightarrow \ln(3x_1)=x_1\ \kappa\alpha\iota\ f(x_2)=0\Leftrightarrow \ln(3x_2)=x_2}$

Δ3. $E>0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_2+x_1-2)>0$ ($x_2-x_1>0$) $\Leftrightarrow (x_2+x_1-2)>0 \Leftrightarrow 2-x_1<x_2$. Ισχύει $x_1<1\ \kappa\alpha\iota\ 2-x_1>1$, άρα $1<2-x_1<x_2$ και f↑ άρα $f(2-x_1)<f(x_2)=0.$

Δ4. Ισχύει ότι $f(x)\geq f(1)=1-ln3(\ \tau o = \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \gamma\iota\alpha\ x=1).$ Η εφαπτομένη της γραφικής της f στο $(x_2,f(x_2))$ έχει την μορφή

$y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y = f'(x_2)(x - x_2)$.
Η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$, άρα $f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2)$(το = για $x = x_2 \neq 1$) **(1)** και $f(x) \geq 1 - ln3$ **(2)**

Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις (1),(2) και βγαίνει το ζητούμενο

$$2f(x) + ln3 > 1 + f'(x_2)(x - x_2)$$

Επιμέλεια :
Δήμητρα Δασκαλάκη
Μαρία Όλγα Δασκαλάκη
Αντώνης Μαλλιαράκης
Ρένια Φαρσάρη