ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΑΛΓΕΒΡΑ/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

Ημερομηνία: Σάββατο 11 Μαΐου 2024
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη ιδιότητας λογαρίθμων, σελίδα 175 σχολικού βιβλίου.

Α2. Ορισμός μονοτονίας συνάρτησης, σελίδα 31 σχολικού βιβλίου.

Α3. Σωστή απάντηση η Β) $x - 3y = -5$.

Το (Σ) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - 3y = -5 \end{cases}$ έχει μοναδική λύση την

$(x, y) = (1{,}2)$ αφού $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - 3y = -5 \end{cases} \begin{array}{|l} \square \\ -2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 4 \\ -2x + 6y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 7y = 14 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$

Α4. α) Λάθος

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Λάθος

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. $P(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0$.

Πιθανές ακέραιες ρίζες οι $\pm 1, \pm 2$.

Κάνουμε σχήμα Horner για $\rho = 1$

1	0	1	- 2	ρ = 1
↓	1	1	2	
1	1	2	0	

Από την ταυτότητα της διαίρεσης παίρνουμε

$x^3+x-2=(x-1)(x^2+x+2)$ άρα $(x-1)(x^2+x+2)=0 \Leftrightarrow$

$x-1=0$ ή $x^2+x+2=0 \Leftrightarrow x=1$.

Η εξίσωση $x^2+x+2=0$ είναι αδύνατη στο σύνολο $\mathbb{R}$ αφού

$\Delta=1-8=-7<0$.

Άρα η εξίσωση $P(x)=0$ έχει μοναδική λύση την $x=1$.

Β2. Αφού τα $P(x), Q(x)$ έχουν κοινή λύση, η $x=1$ είναι ρίζα και του πολυωνύμου $Q(x)$.

Άρα $Q(1)=0 \Leftrightarrow 1-a+11-a=0 \Leftrightarrow 12=2a \Leftrightarrow a=6$.

Για $a=6$ είναι $Q(x)=x^3-6x^2+11x-6,\ x\in\mathbb{R}$.

Β3. $Q(x)\le 0 \Leftrightarrow x^3-6x^2+11x-6\le 0$.

Κάνουμε σχήμα Horner για το $Q(x)$ και $\rho=1$.

1	-6	11	-6	$\rho=1$
↓	1	-5	6	
1	-5	6	0	

Έτσι $x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x^2-5x+6)$ οπότε

$(x-1)(x^2-5x+6)\le 0$.

Οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-5x+6=0$ είναι οι 2, 3.

Άρα $Q(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=2$ ή $x=3$.

Κάνουμε πίνακα προσήμου:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$x-1$		—	0	+		+		+	
x^2-5x+6		+		+	0	—	0	+	
$Q(x)$		—	0	+	0	—	0	+	

Από τον πίνακα προκύπτει ότι $Q(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1] \cup [2,3]$.

Β4. Α΄ τρόπος

Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης $y = Q(x)$ κατά μία μονάδα προς τα αριστερά. Αφού η γραφική παράταση της $y = Q(x)$ τέμνει τον $x'x$ άξονα στα σημεία

$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$ η C_f θα τέμνει τον $x'x$ άξονα στα σημεία με τετμημένη $x'_1 = 0,\ x'_2 = 1,\ x'_3 = 2$.

Άρα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον x'x άξονα τα Α(0,0), Β(1,0) και Γ(2,0).

Β΄ τρόπος

Θα λύσουμε την εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow Q(x+1) = 0$.

Θέτουμε $u = x + 1$ οπότε η εξίσωση γίνεται $Q(u) = 0$. Η τελευταία έχει ρίζες $u = 1$ ή $u = 2$ ή $u = 3$ και επειδή ισχύει $x = u - 1$ παίρνουμε $x = 0$ ή

$x = 1$ ή $x = 2$.

Άρα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον x'x άξονα τα Α(0,0), Β(1,0) και Γ(2,0).

Γ΄ τρόπος

Αφού $Q(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ θα είναι

$f(x) = Q(x+1) = (x+1)^3 - 6(x+1)^2 + 11(x+1) - 6$ ή

$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 6x^2 - 12x - 6 + 11x + 11 - 6$ ή

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x, x \in \mathbb{R}$.

Είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 1$ ή $x = 2$.

Άρα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον x'x άξονα τα Α(0,0), Β(1,0) και Γ(2,0).

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Χρησιμοποιώντας ιδιότητες της αναγωγής στο 1ο τεταρτημόριο παίρνουμε:

- $\sigma\upsilon\nu(21\pi-\theta)=\sigma\upsilon\nu(20\pi+\pi-\theta)=\sigma\upsilon\nu(\pi-\theta)=-\sigma\upsilon\nu\theta$
- $\sigma\varphi(17\pi+\theta)=\sigma\varphi(16\pi+\pi+\theta)=\sigma\varphi(\pi+\theta)=\sigma\varphi\theta$
- $\varepsilon\varphi\left(\frac{21\pi}{2}-\theta\right)=\varepsilon\varphi\left(10\pi+\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sigma\varphi\theta$
- $\eta\mu\left(\frac{19\pi}{2}-\theta\right)=\eta\mu\left(\frac{20\pi}{2}-\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\eta\mu\left(10\pi-\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=-\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sigma\upsilon\nu(-\theta)=-\sigma\upsilon\nu\theta$

Άρα

$$\mathrm{A}=\frac{-\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\sigma\varphi\theta}{\sigma\varphi\theta\cdot(-\sigma\upsilon\nu\theta)}=1$$

οπότε ο τύπος της f γίνεται $f(x)=2\cdot\sigma\upsilon\nu 2x+\mathrm{B}$.

Αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $\kappa\left(\frac{\pi}{2},-2\right)$ έχουμε

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu(2\frac{\pi}{2})+\mathrm{B}=-2 \Leftrightarrow 2\cdot\sigma\upsilon\nu\pi+\mathrm{B}=-2 \Leftrightarrow$

$-2+B=-2 \Leftrightarrow \mathrm{B}=0.$

Γ2. Έχουμε $f(x)=2\cdot\sigma\upsilon\nu 2x,\ x\in\mathbb{R}$.

Θα λύσουμε την εξίσωση $f(x)=-2$ για $x\in[-\pi,\pi]$.

Έχουμε $f(x)=-2 \Leftrightarrow 2\cdot\sigma\upsilon\nu 2x=-2 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x=-1$

Αντικαθιστώντας το -1 με $\sigma\upsilon\nu\pi$ παίρνουμε

$\sigma\upsilon\nu 2x=\sigma\upsilon\nu\pi \Leftrightarrow 2x=2\kappa\pi+\pi$ ή $2x=2\kappa\pi-\pi \Leftrightarrow$

$x=\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$ ή $x=\kappa\pi-\frac{\pi}{2},\kappa\in\mathbb{Z}$.

- Για $x=\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$ και $x\in[-\pi,\pi]$ παίρνουμε

$$-\pi\le\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\le\pi \Leftrightarrow -\pi-\frac{\pi}{2}\le\kappa\pi\le\pi-\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{-3\pi}{2}\le\kappa\pi\le\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{3}{2}\le\kappa\le\frac{1}{2} \overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Longrightarrow} \kappa=-1 \text{ ή } \kappa=0.$$

Για $\kappa = -1$: $x = -\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{2}$

$\kappa = 0$: $x = \frac{\pi}{2}$

- Για $x = \kappa\pi - \frac{\pi}{2}$ και $x \in [-\pi, \pi]$ έχουμε

$$-\pi \leq \kappa\pi - \frac{\pi}{2} \leq \pi \Leftrightarrow -\pi + \frac{\pi}{2} \leq \kappa\pi \leq \pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{-\pi}{2} \leq \kappa\pi \leq \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{2} \leq \kappa \leq \frac{3}{2} \overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Longrightarrow} \kappa = 0 \text{ ή } \kappa = 1.$$

Για $\kappa = 0$: $x = -\frac{\pi}{2}$

$\kappa = 1$: $x = \pi - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$.

Άρα τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f και της $y = -2$ είναι $A(-\frac{\pi}{2}, -2)$ και $B(\frac{\pi}{2}, -2)$.

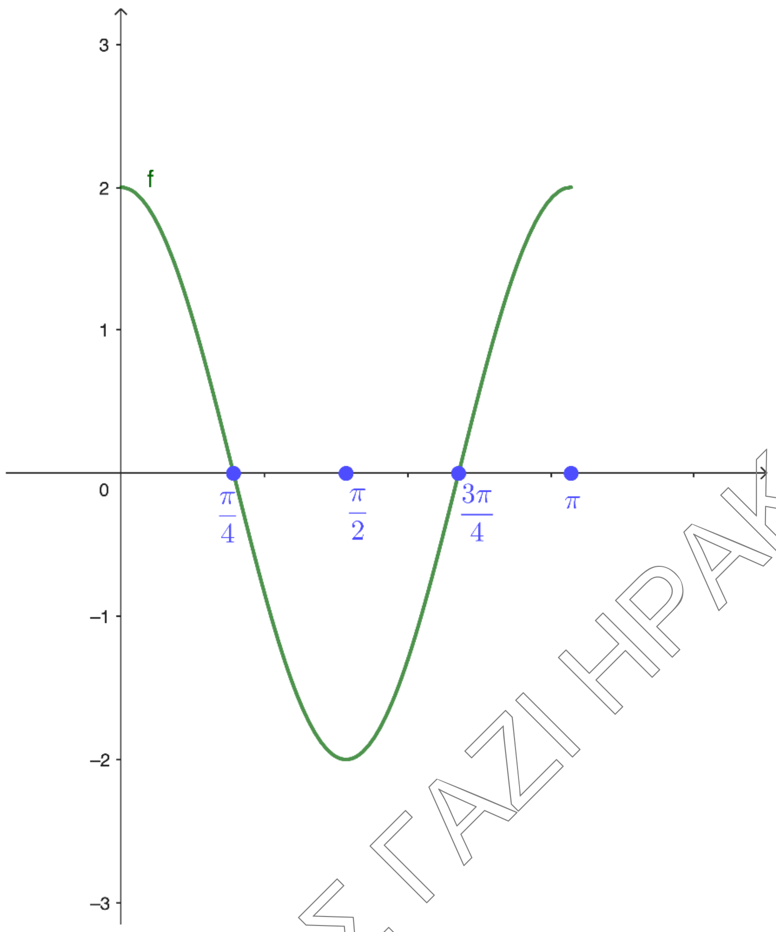
Γ3. Για την $f(x) = 2 \cdot \sigma\upsilon\nu 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

Έχει περίοδο $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, μέγιστη τιμή την 2 και ελάχιστη τιμή την – 2.

Πίνακας τιμών για $x \in [0, \pi]$:

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
$2x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sigma\upsilon\nu 2x$	1	0	-1	0	1
$f(x) = 2 \cdot \sigma\upsilon\nu 2x$	2	0	-2	0	2

Η γραφική παράσταση της f στο $[0, \pi]$:



Γ4. Γνωρίζουμε ότι η μέγιστη τιμή της f στο $\mathbb{R}$ είναι η 2 δηλαδή $f(x) \leq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επίσης, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $e^x > 0 \Leftrightarrow e^x + 2 > 2$.

Άρα δεν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(x) = e^x + 2 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu 2x = e^x + 2$ δηλαδή, η εξίσωση είναι αδύνατη.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αφού το 2 ρίζα της $f(x)$ θα είναι $f(2) = 0 \Leftrightarrow$

$$2^{\nu+2} - 5 \cdot 2^{2\nu-2} + 4 \cdot 2^{\nu-2} = 0 \Leftrightarrow 2^{\nu} \cdot 2^2 - 5 \cdot \frac{2^{2\nu}}{2^2} + 4 \cdot \frac{2^{\nu}}{2^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$4 \cdot 2^{\nu} - 5 \cdot \frac{2^{2\nu}}{4} + 4 \cdot \frac{2^{\nu}}{4} = 0 \Leftrightarrow 16 \cdot 2^{\nu} - 5 \cdot 2^{2\nu} + 4 \cdot 2^{\nu} = 0 \Leftrightarrow$$

$$20 \cdot 2^{\nu} = 5 \cdot 2^{2\nu} \Leftrightarrow 4 \cdot 2^{\nu} = 2^{2\nu} \Leftrightarrow 2^{\nu+2} = 2^{2\nu} \Leftrightarrow \nu + 2 = 2\nu \Leftrightarrow \nu = 2$$

Δ2. Για $\nu = 2$ ο τύπος της f γίνεται $f(x) = x^4 - 5 \cdot x^2 + 4, x \in \mathbb{R}^*$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 5 \cdot x^2 + 4 = 0,\ x \in \mathbb{R}^*$

Θέτουμε $x^2 = \omega > 0$ οπότε η εξίσωση γίνεται $\omega^2 - 5\omega + 4 = 0$ με ρίζες

$\omega = 1$ ή $\omega = 4$.

Άρα $x^2 = 1$ ή $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 1$ ή $x = \pm 2$.

Το τριώνυμο $\omega^2 - 5\omega + 4$ με ρίζες 1 και 4 γράφεται

$\omega^2 - 5\omega + 4 = (\omega - 1) \cdot (\omega - 4)$ και θέτοντας για ω το x^2 έχουμε

$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1) \cdot (x^2 - 4), x \in \mathbb{R}^*$

Για το πρόσημο της $f(x)$ έχουμε :

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
x^2-1		+		+	0	−	‖	−	0	+		+	
x^2-4		+	0	−		−	‖	−		−	0	+	
$f(x)$		+	0	−	0	+	‖	+	0	−	0	+	

Έτσι $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 0) \cup (0,1) \cup (2, +\infty)$ και

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, -1) \cup (1, 2)$.

Δ3. α) Για $f(x) = x^4 - 5 \cdot x^2 + 4, x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε

i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^* \Rightarrow -x \in \mathbb{R}^*$ και

$$f(-x) = (-x)^4 - 5 \cdot (-x)^2 + 4 = x^4 - 5x^2 + 4 = f(x)$$

άρα η f είναι άρτια.

ii. Αφού η f άρτια για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}^*$ ισχύει $f(-\alpha) = f(\alpha)$ οπότε

$f(a) \cdot f(-a) = f(a) \cdot f(a) = f^2(a) \geq 0$

β) Γνωρίζω ότι $ln\frac{1}{x} = ln1 - lnx = -lnx$ οπότε η ανίσωση γίνεται

$f(lnx) \cdot f(ln\frac{1}{x}) \leq 0 \Leftrightarrow f(lnx) \cdot f(-lnx) \leq 0$ (1)

Όμως από Δ3ii) έχω ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}^*$ ισχύει $f(a) \cdot f(-a) \geq 0$, οπότε θα είναι $f(lnx) \cdot f(-lnx) \geq 0$ (2).

Από (1) και (2) τελικά παίρνουμε $f(lnx)\cdot f(-lnx)=0 \Leftrightarrow$

$$f(lnx)\cdot f(lnx)=0 \Leftrightarrow f(lnx)=0.$$

Οι ρίζες της $f(x)=0$ είναι οι -2, -1, 1, 2 οπότε παίρνουμε

$$lnx=-2 \text{ ή } lnx=-1 \text{ ή } lnx=1 \text{ ή } lnx=2 \Leftrightarrow$$

$$x=e^{-2} \text{ ή } x=e^{-1} \text{ ή } x=e \text{ ή } x=e^{2}$$, δεκτές ρίζες.

Δ4. Για $x_0>0$ έχουμε

$x_0+lnx_0=0 \Leftrightarrow lnx_0=-x_0 \Leftrightarrow e^{lnx_0}=e^{-x_0} \Leftrightarrow \frac{x_0}{e^{-x_0}}=1 \Leftrightarrow x_0\cdot e^{x_0}=1$ άρα ο αριθμός $\rho=x_0\cdot e^{x_0}$ είναι ρίζα της $f(x)=0$.