ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2024
Β΄ ΦΑΣΗ

Ε_3.Μλ1Α(α)

ΤΑΞΗ: **Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΑΛΓΕΒΡΑ**

Ημερομηνία: Σάββατο 11 Μαΐου 2024
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Βλέπε σελ. 90.

Α2.

Πίνακας Ι				
1	2	3	4	5
Β	Ε	Α	Δ	Γ

Α3. **α)** Λάθος

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Λάθος

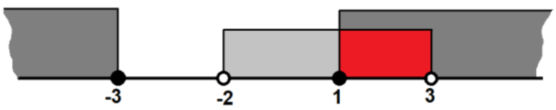
ΘΕΜΑ Β

Β1. $|x+1| \geq 2 \Leftrightarrow x+1 \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 2-1 \Leftrightarrow x \geq 1$

ή $x+1 \leq -2 \Leftrightarrow x \leq -2-1 \Leftrightarrow x \leq -3$

$|2x-1| < 5 \Leftrightarrow -5 < 2x-1 < 5 \overset{+1}{\Leftrightarrow} -4 < 2x < 6 \Leftrightarrow -2 < x < 3$

Β2. Έχουμε: $x \geq 1$ ή $x \leq -3$ και $-2 < x < 3$:



ΚΥΚΛΟΣ ΓΑΖΙ ΗΡΑΚΛΕΙΟΥ

Οι κοινές λύσεις είναι: $x \in [1,3)$

Β3. i) $\alpha_1 \in [1,3) \Leftrightarrow 1 \le \alpha_1 < 3$ και $\omega \in [1,3) \Leftrightarrow 1 \le \omega < 3$

$|\alpha_1 + 1| = 3 \Leftrightarrow \alpha_1 + 1 = 3 \Leftrightarrow \alpha_1 = 3 - 1 \Leftrightarrow \alpha_1 = 2$ δεκτή.

ή $\alpha_1 + 1 = -3 \Leftrightarrow \alpha_1 = -3 - 1 \Leftrightarrow \alpha_1 = -4$ απορρίπτεται.

$\omega^3 = 8 \Leftrightarrow \omega = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow \omega = 2$ δεκτή.

ii) $\alpha_{10} = \alpha_1 + 9\omega = 2 + 9 \cdot 2 = 2 + 18 = 20$.

$S_{10} = \frac{10}{2}[2\alpha_1 + (10-1)\omega] = 5(2 \cdot 2 + 9 \cdot 2) = 5(4+18) = 5 \cdot 22 = 110$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Πρέπει:

$-x^2 + 6x - 5 \ge 0$

$\Delta = 6^2 - 4(-1)(-5) = 36 - 20 = 16$

$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{2(-1)} = \frac{-6 \pm 4}{-2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{-6+4}{-2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{-2}{-2} \Leftrightarrow x_1 = 1.$

ή $x_2 = \frac{-6-4}{-2} \Leftrightarrow x_2 = \frac{-10}{-2} \Leftrightarrow x_2 = 5.$

Πρόσημο του τριωνύμου:

x	$-\infty$	1		5	$+\infty$
$-x^2+6x-5$	$-$	0	$+$	0	$-$

Άρα $x \in [1,5]$ οπότε $A_f = [1,5]$.

$f(3) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{-9+18-5} - \kappa = 1 \Leftrightarrow \sqrt{4} - \kappa = 1 \Leftrightarrow 2 - \kappa = 1 \Leftrightarrow \kappa = 1$.

ΚΥΚΛΟΣ ΓΑΖΙ ΗΡΑΚΛΕΙΟΥ

Γ2. Έχουμε:

$$f\left(x\right)=\sqrt{-x^2+6x-5}-1$$

$$f\left(2\right)=\sqrt{-4+12-5}-1=\sqrt{3}-1.$$

$$B=\frac{1}{f\left(2\right)}+\frac{1}{f\left(2\right)+2}=\frac{1}{\sqrt{3}-1}+\frac{1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{2\sqrt{3}}{3-1}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}.$$

Γ3. Έχουμε:

$$|x-1|+f\left(x\right)=-1\Leftrightarrow|x-1|+\sqrt{-x^2+6x-5}-1=-1\Leftrightarrow|x-1|+\sqrt{-x^2+6x-5}=0$$

ως άθροισμα μη αρνητικών ποσοτήτων ίσο με μηδέν θα ισχύει:

- $|x-1|=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$ και
- $\sqrt{-x^2+6x-5}=0\Leftrightarrow -x^2+6x-5=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x=5$.

Κοινή τιμή η $x=1$ που είναι δεκτή διότι $x\in[1,5]$.

Γ4. Έστω ότι η εξίσωση της ευθείας είναι ε: $y=\mathrm{B}x+\beta$ με $\mathrm{B}=\sqrt{3}$.

Άρα ε: $y=\sqrt{3}\cdot x+\beta$. Η ε διέρχεται από το σημείο Γ($\sqrt{3}$,1) οπότε οι συντεταγμένες του σημείου Γ θα επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.

Άρα για $x=\sqrt{3}$ και $y=1$ έχουμε $1=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+\beta\Leftrightarrow 1=3+\beta\Leftrightarrow\beta=-2$.

Οπότε ε: $y=\sqrt{3}\cdot x-2$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε:

$$\Delta=[-(2\lambda-1)]^2-4\cdot1\cdot(\lambda^2-\lambda-2)=(2\lambda-1)^2-4(\lambda^2-\lambda-2)\Leftrightarrow$$

$$\Delta=4\lambda^2-4\lambda+1-4\lambda^2+4\lambda+8=9.$$

Αφού $\Delta>0$ η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ.

Δ2. i) $S=x_1+x_2=-\dfrac{-(2\lambda-1)}{1}=2\lambda-1$ και $P=x_1\cdot x_2=\dfrac{\lambda^2-\lambda-2}{1}=\lambda^2-\lambda-2$.

ΚΥΚΛΟΣ ΓΑΖΙ ΗΡΑΚΛΕΙΟΥ

ii) Έχουμε:

$4\lambda + S^2 - 4\left(P - x^2 + x\lambda\right) \geq -4(x-1)(\lambda+1) + 4 \Leftrightarrow$

$4\lambda + (2\lambda-1)^2 - 4\left(\lambda^2 - \lambda - 2 - x^2 + x\lambda\right) \geq -4(x-1)(\lambda+1) + 4 \Leftrightarrow$

$4\lambda + 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 - 4\lambda^2 + 4\lambda + 8 + 4x^2 - 4x\lambda \geq -4(x\lambda + x - \lambda - 1) + 4 \Leftrightarrow$

$9 + 4\lambda + 4x^2 - 4x\lambda \geq -4x\lambda - 4x + 4\lambda + 4 + 4 \Leftrightarrow$

$4x^2 + 4x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (2x+1)^2 \geq 0$ που ισχύει.

Δ3. i) Για $\lambda = 5$ η εξίσωση (1) γράφεται:

$x^2 - (10-1)\cdot x + 5^2 - 5 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 25 - 5 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 18 = 0$.

ii) $x^2 - 9x + 18 < 0$

$\Delta = (-9)^2 - 4\cdot 1\cdot 18 = 81 - 72 = 9$

$x_{1,2} = \dfrac{-(-9) \pm \sqrt{9}}{2\cdot 1} = \dfrac{9 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x_1 = \dfrac{9+3}{2} \Leftrightarrow x_1 = \dfrac{12}{2} \Leftrightarrow x_1 = 6.$

ή $x_2 = \dfrac{9-3}{2} \Leftrightarrow x_2 = \dfrac{6}{2} \Leftrightarrow x_2 = 3.$

Πρόσημο του τριωνύμου:

x	$-\infty$	3		6		$+\infty$
x^2-9x +18	+	0	−	0	+	

Άρα $x \in (3,6)$.

iii) Έχουμε: $\mathrm{K} = \alpha^2 - 9\cdot|\alpha| + 18 \Leftrightarrow \mathrm{K} = |\alpha|^2 - 9\cdot|\alpha| + 18 \Leftrightarrow K = (|\alpha|-3)(|\alpha|-6)$

Όμως:

$|\alpha| < 3 \Leftrightarrow |\alpha| - 3 < 0$ και

$|\alpha| < 3 \overset{-6}{\Leftrightarrow} |\alpha| - 6 < 3 - 6 \Leftrightarrow |\alpha| - 6 < -3$ δηλαδή $|\alpha| - 6 < 0$.

Άρα $\mathrm{K} > 0$ ως γινόμενο αρνητικών όρων.

ΚΥΚΛΟΣ ΓΑΖΙ ΗΡΑΚΛΕΙΟΥ