



ΤΑΞΗ: Α' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 6 Μαΐου 2023

Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 88 σχολικού βιβλίου

Α2. α) Σωστό

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Λάθος

ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1.

1^η Λύση:

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΕΒΓ και ΔΓΒ

- $BE = \Gamma\Delta$ (υπόθεση)
- $\widehat{E\Gamma B} = \widehat{\Delta\Gamma B}$ (το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές)
- ΒΓ (κοινή πλευρά)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα $Β\Delta = \Gamma\epsilon$.2^η Λύση:

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΕΓ

- $A\Delta = A\epsilon$ (Διαφορά ίσων τμημάτων: $A\Delta = A\Gamma - \Delta\Gamma$ και $A\epsilon = AB - EB$)
- $\widehat{B\hat{A}\Delta} = \widehat{\epsilon\hat{A}\Gamma}$ (κοινή γωνία)
- ΑΒ=ΑΓ (κοινή πλευρά)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα $Β\Delta = \Gamma\epsilon$.

B2.

1^η Λύση:

Έχουμε $AE = AD$ ως διαφορά ίσων τμημάτων, οπότε από υπόθεση ισχύει
 $AE = AD = EH = AZ$

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα AEH και AZD

- $EH = AZ$
- $AE = AD$
- $\hat{H}EA = \hat{Z}DA$ (ως κατακορυφήν των ίσων γωνιών $\hat{B}EA$ και $\hat{G}DB$)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα $AH = AZ$

2^η Λύση:

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα HAG και AZB

- $HG = ZB$ (άθροισμα ίσων τμημάτων: $HG = HE + EG$ και $ZB = AZ + BD$)
- $\hat{A}GH = \hat{A}BZ$ (από την σύγκριση στο B1 με την 2^η Λύση)
- $AG = AB$ (το τρίγωνο ABG είναι ισοσκελές)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα $AH = AZ$.

B3. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $H\Theta G$ και ZIB

- $\hat{H}\Theta G = \hat{ZIB} = 90^\circ$
- $HG = ZB$ ($HG = HE + EG$ και $ZB = ZA + AB$)
- $\hat{H}\hat{G}\Theta = \hat{ZBI}$ (από την ισότητα των τριγώνων BEG και $ΓΔB$)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων (μία πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία) τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε
 $H\Theta = ZI$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Το τρίγωνο BGE είναι ισόπλευρο άρα η γωνία $\hat{EBG} = 60^\circ$

Το τρίγωνο ABD είναι ισόπλευρο άρα και η γωνία $\hat{ABD} = 60^\circ$

Άρα $AD // BE$ διότι οι εντός εκτός και επι ταυτά γωνίες που σχηματίζονται από αυτές και την ευθεία (ε) είναι ίσες.

Γ2. Έχουμε $ΑΔ // ΒΕ$ άρα $ΗΔ // ΒΕ$. Επίσης το τρίγωνο $ΑΒΔ$ είναι ισόπλευρο άρα η $ΒΗ$ ως ύψος είναι και διάμεσος, οπότε

$$ΗΔ = \frac{ΑΔ}{2} = \frac{ΑΒ}{2} = \frac{2ΒΓ}{2} = ΒΓ = ΒΕ \text{ (επειδή το } ΒΕΓ \text{ τρίγωνο ισόπλευρο)}$$

Συνεπώς το τετράπλευρο $ΗΔΕΒ$ είναι παραλληλόγραμμο (έχει 2 πλευρές παράλληλες και ίσες) και επειδή $\hat{Η} = 90^\circ$ είναι ορθογώνιο.

Γ3. Στο τρίγωνο $ΑΔΖ$ έχουμε $ΗΒ // ΔΕ$ άρα $ΗΒ // ΔΖ$ και επειδή $Η$ το μέσο της $ΑΔ$ έχουμε ότι $Β$ το μέσο της $ΑΖ$

Γ4. Στο τρίγωνο $ΑΔΖ$ έχουμε $Β$ το μέσο της $ΑΖ$ και $ΒΕ // ΑΔ$ ($ΗΔΕΒ$ παραλληλόγραμμο) άρα το $Ε$ είναι το μέσο της $ΔΖ$.

Το $ΗΕ$ ενώνει τα δύο μέσα των πλευρών $ΑΔ$ και $ΔΖ$ του τριγώνου $ΑΔΖ$ άρα $ΗΕ // ΑΖ$ άρα $ΗΕ // ΑΓ$ οπότε το $ΑΗΕΓ$ είναι τραπέζιο και επειδή

$$ΑΗ = \frac{ΑΔ}{2} = \frac{2ΒΓ}{2} = ΒΓ = ΕΓ \text{ το } ΑΗΕΓ \text{ είναι ισοσκελές τραπέζιο.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Το τρίγωνο $ΑΒΔ$ είναι ισοσκελές, συνεπώς $\hat{ΑΒΔ} = \hat{ΑΛΒ}$

Το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι τραπέζιο συνεπώς $ΑΒ // ΔΓ$ άρα

$$\hat{ΑΒΔ} = \hat{ΒΔΓ} \text{ ως εντός εναλλάξ.}$$

Άρα ισχύει ότι $\hat{ΑΔΒ} = \hat{ΒΔΓ}$, οπότε $\hat{ΑΔΓ} = 2\hat{ΒΔΓ}$ όμως από υπόθεση

$$\hat{ΑΔΓ} = 2\hat{ΒΓΔ} \text{ άρα } 2\hat{ΒΓΔ} = 2\hat{ΒΔΓ} \Leftrightarrow \hat{ΒΓΔ} = \hat{ΒΔΓ} \text{ άρα το τρίγωνο } ΔΒΓ$$

είναι ισοσκελές συνεπώς $ΔΒ = ΒΓ$.

Δ2. Έχουμε $ΔΒ = ΒΕ$ άρα στο τρίγωνο $ΕΓΔ$ η $ΓΒ$ είναι διάμεσος και για αυτήν

$$\text{ισχύει: } ΓΒ = ΔΒ = \frac{ΔΕ}{2}. \text{ Άρα το τρίγωνο } ΕΓΔ \text{ είναι ορθογώνιο διότι η}$$

διάμεσος ισούται με το μισό της πλευράς που αντιστοιχεί συνεπώς

$$\hat{ΕΓΔ} = 90^\circ \text{ άρα } ΕΓ \perp ΔΓ$$

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2023**
Β' ΦΑΣΗ**E_3.Γλ1Α(α)**

- Δ3.** Η γωνία $\widehat{E\hat{B}\Gamma}$ είναι εξωτερική του τριγώνου $B\Delta\Gamma$ οπότε έχουμε
$$\widehat{E\hat{B}\Gamma} = \widehat{B\hat{\Delta}\Gamma} + \widehat{B\hat{\Gamma}\Delta} = 2\widehat{B\hat{\Delta}\Gamma} = 2\widehat{A\hat{B}\Delta}$$
- Δ4.** Το τετράπλευρο $AB\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο διότι $AZ // B\Gamma$ και $AB // Z\Gamma$ άρα $AZ = B\Gamma$. Από $\Delta 1$ το $B\Delta = B\Gamma$ άρα $AZ = B\Gamma = B\Delta$ (1). Το τετράπλευρο $ABZ\Delta$ είναι τραπέζιο διότι $AB // \Delta Z$ και έχει ίσες διαγώνιες $AZ = B\Delta$ (σχέση (1)) συνεπώς είναι ισοσκελές τραπέζιο άρα $A\Delta = BZ$ όμως από υπόθεση έχουμε $A\Delta = AB$ άρα $AB = BZ$

ΚΥΚΛΟΣ ΓΙΑ ΗΡΑΚΛΕΙΟΥ