



ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 13 Ιανουαρίου 2024

Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 63 σχολικού βιβλίου.

Α2.

Πίνακας Ι				
1	2	3	4	5
Γ	Β	Α	Ε	Δ

Α3. α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Λάθος

δ) Σωστό

ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

$$\text{B1. } 2|x-3|-4=0 \Leftrightarrow 2|x-3|=4 \Leftrightarrow |x-3|=2 \Leftrightarrow x-3=2 \text{ ή } x-3=-2 \Leftrightarrow$$
$$x=5 \text{ ή } x=1$$

$$\text{B2. } x^5-8x^2=0 \Leftrightarrow x^2(x^3-8)=0 \Leftrightarrow x^2=0 \text{ ή } x^3-8=0 \Leftrightarrow$$

$$x=0 \text{ ή } x^3=8 \Leftrightarrow$$

$$x=\sqrt[3]{8} \Leftrightarrow$$

$$x=2$$

B3.
$$\frac{x+2}{x} + \frac{4}{x-2} = -\frac{8}{x^2-2x}$$

Η εξίσωση αυτή ορίζεται για κάθε x με

- $x \neq 0$ και
- $x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ και
- $x^2-2x \neq 0 \Leftrightarrow x(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ και $x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ και $x \neq 2$.

Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\frac{x+2}{x} + \frac{4}{x-2} = -\frac{8}{x(x-2)} \text{ το ΕΚΠ} = x(x-2), \text{ άρα}$$

$$x(x-2) \frac{x+2}{x} + x(x-2) \frac{4}{x-2} = -x(x-2) \frac{8}{x(x-2)} \Leftrightarrow$$

$$(x-2)(x+2) + 4x = -8 \Leftrightarrow x^2 - 4 + 4x + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ Δεκτή.}$$

B4. α' τρόπος:

$$(x-2)(x^2-2x) - (9-2x)(x-2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)x(x-2) - (9-2x)(x-2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)[x(x-2) - (9-2x)] = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)(x^2 - 2x - 9 + 2x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)(x^2 - 9) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)(x-3)(x+3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x-2 = 0 \text{ ή } x-3 = 0 \text{ ή } x+3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 2 \quad \text{ή } x = 3 \quad \text{ή } x = -3$$

β' τρόπος:

$$(x-2)(x^2-2x)-(9-2x)(x-2)=0 \Leftrightarrow$$

$$(x^3-2x^2-2x^2+4x)-(9x-18-2x^2+4x)=0 \Leftrightarrow$$

$$x^3-2x^2-2x^2+4x-9x+18+2x^2-4x=0 \Leftrightarrow$$

$$x^3-2x^2-9x+18=0 \Leftrightarrow$$

$$x^2(x-2)-9(x-2)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2-9)=0 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)(x-3)(x+3)=0 \Leftrightarrow$$

$$x-2=0 \text{ ή } x-3=0 \text{ ή } x+3=0 \Leftrightarrow$$

$$x=2 \quad \text{ή} \quad x=3 \quad \text{ή} \quad x=-3$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Πρέπει:

- $x-5 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 5$ και
- $x+3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$ και
- $x^2-10x+25 \geq 0 \Leftrightarrow (x-5)^2 \geq 0$ Ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $x^2+6x+9 \geq 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 \geq 0$ Ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άρα η Κ ορίζεται για $x \neq 5$ και $x \neq -3$

Γ2. i) $K = \frac{\sqrt{x^2-10x+25}}{x-5} - \frac{\sqrt{x^2+6x+9}}{x+3} = \frac{\sqrt{(x-5)^2}}{x-5} - \frac{\sqrt{(x+3)^2}}{x+3} = \frac{|x-5|}{x-5} - \frac{|x+3|}{x+3}$

- $-3 < x < 5 \Leftrightarrow -8 < x-5 < 0$ δηλαδή $x-5 < 0$ άρα το $|x-5| = -x+5$
- $-3 < x < 5 \Leftrightarrow 0 < x+3 < 8$ δηλαδή $x+3 > 0$ άρα το $|x+3| = x+3$

Οπότε $K = \frac{|x-5|}{x-5} - \frac{|x+3|}{x+3} = \frac{-x+5}{x-5} - \frac{x+3}{x+3} = -\frac{x-5}{x-5} - \frac{x+3}{x+3} = -1-1 = -2$

ii) $\beta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)} + \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)}{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)} \Leftrightarrow$

$$\beta = \frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2-2^2} + \frac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2-2^2} = \frac{3+2\sqrt{3}}{3-4} + \frac{3-2\sqrt{3}}{3-4} = \frac{3+2\sqrt{3}}{-1} + \frac{3-2\sqrt{3}}{-1} \Leftrightarrow$$

$$\beta = -(3+2\sqrt{3}) - (3-2\sqrt{3}) = -3-2\sqrt{3}-3+2\sqrt{3} = -6$$

Γ3. $\frac{2 \cdot \beta \cdot x}{x^2 + \beta^2} \leq 1$. Πρέπει $x^2 + \beta^2 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 + (-6)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 + 36 \neq 0$ που ισχύει επειδή

$$x^2 + 36 > 0. \text{ Επομένως } \frac{2 \cdot \beta \cdot x}{x^2 + \beta^2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2 \cdot (-6) \cdot x}{x^2 + (-6)^2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{-12 \cdot x}{x^2 + 36} \leq 1 \quad (x^2+36)>0 \Leftrightarrow$$

$$(x^2 + 36) \cdot \frac{-12 \cdot x}{x^2 + 36} \leq 1 \cdot (x^2 + 36) \Leftrightarrow -12 \cdot x \leq x^2 + 36 \Leftrightarrow x^2 + 12 \cdot x + 36 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(x+6)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει για κάθε } x \in \mathfrak{R}.$$

Γ4. ά τρόπος:

$$\sqrt[4]{\frac{(\beta^{-2} \cdot \kappa^{-2})^3 \cdot \kappa^4}{(\beta \cdot \kappa^3)^{-2} : (\beta \cdot \kappa)^4}} = \sqrt[4]{\frac{\beta^{-6} \cdot \kappa^{-6} \cdot \kappa^4}{(\beta \cdot \kappa^3)^{-2} : (\beta \cdot \kappa)^4}} = \sqrt[4]{\frac{\beta^{-6} \cdot \kappa^{-6} \cdot \kappa^4}{\beta^{-2} \cdot \kappa^{-6} : \beta^4 \cdot \kappa^4}} =$$

$$= \sqrt[4]{\frac{\beta^{-6} \cdot \kappa^{-6} \cdot \kappa^4 \cdot \beta^4 \cdot \kappa^4}{\beta^{-2} \cdot \kappa^{-6}}} = \sqrt[4]{\beta^{-6} \cdot \kappa^{-6} \cdot \kappa^4 \cdot \beta^4 \cdot \kappa^4 \cdot \beta^2 \cdot \kappa^6} =$$

$$= \sqrt[4]{\beta^{-6+4+2} \cdot \kappa^{-6+4+4+6}} = \sqrt[4]{\beta^0 \cdot \kappa^8} = \sqrt[4]{\kappa^8} = \sqrt[4]{(\kappa^2)^4} = |\kappa^2| = \kappa^2 = (-2)^2 = 4$$

β' τρόπος:

$$\sqrt[4]{\frac{(\beta^{-2} \cdot \kappa^{-2})^3 \cdot \kappa^4}{(\beta \cdot \kappa^3)^{-2} : (\beta \cdot \kappa)^4}} = \sqrt[4]{\frac{((-6)^{-2} \cdot (-2)^{-2})^3 \cdot (-2)^4}{((-6) \cdot (-2)^3)^{-2} : ((-6) \cdot (-2))^4}} = \sqrt[4]{\frac{(12^{-2})^3 \cdot (-2)^4}{(-(-6) \cdot 2^3)^{-2} : 12^4}} =$$

$$= \sqrt[4]{\frac{12^{-6} \cdot 2^4}{(6 \cdot 8)^{-2} : 12^4}} = \sqrt[4]{\frac{12^{-6} \cdot 2^4}{48^{-2} : 12^4}} = \sqrt[4]{\frac{12^{-6} \cdot 2^4}{\frac{48^{-2}}{12^4}}} = \sqrt[4]{\frac{12^{-6} \cdot 2^4 \cdot 12^4}{48^{-2}}} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt[4]{\frac{(2^2 \cdot 3)^{-6} \cdot 2^4 \cdot (2^2 \cdot 3)^4}{(2^4 \cdot 3)^{-2}}} = \sqrt[4]{\frac{2^{-12} \cdot 3^{-6} \cdot 2^4 \cdot 2^8 \cdot 3^4}{2^{-8} \cdot 3^{-2}}} = \sqrt[4]{2^{-12+4+8+8} \cdot 3^{-6+4+2}} = \sqrt[4]{2^8 \cdot 3^0} = \\
 &= \sqrt[4]{2^8 \cdot 1} = \sqrt[4]{2^8} = \sqrt[4]{(2^2)^4} = |2^2| = 4
 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε: $(\lambda - 1)^2 \cdot x - 2x + \lambda = 2\lambda \cdot (1 - x) + 1 \Leftrightarrow$

$$(\lambda^2 - 2\lambda + 1) \cdot x - 2x + \lambda = 2\lambda - 2\lambda x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 x - 2\lambda x + x - 2x + \lambda = 2\lambda - 2\lambda x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 x - x = \lambda + 1 \Leftrightarrow$$

$$(\lambda^2 - 1) \cdot x = \lambda + 1$$

Δ2. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\lambda^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda - 1 \neq 0$ και $\lambda + 1 \neq 0 \Leftrightarrow$
 $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -1$

τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την:

$$x_0 = \frac{\lambda + 1}{\lambda^2 - 1} = \frac{\lambda + 1}{(\lambda - 1)(\lambda + 1)} = \frac{1}{\lambda - 1}$$

- Αν $\lambda = 1$ η εξίσωση (1) γίνεται $0x = 2$ και είναι αδύνατη.
- Αν $\lambda = -1$ η εξίσωση (1) γίνεται $0x = 0$ και είναι αόριστη.

Δ3. Η περίμετρος τετραγώνου πλευράς x_0 είναι $\Pi = 4 \cdot x_0$

$$\text{Άρα } \Pi = 4 \cdot x_0 = 4 \cdot \frac{1}{\lambda - 1} = \frac{4}{\lambda - 1}.$$

$$\text{Έχουμε } \lambda \in (2, 5) \Leftrightarrow 2 < \lambda < 5 \Leftrightarrow 2 - 1 < \lambda - 1 < 5 - 1 \Leftrightarrow 1 < \lambda - 1 < 4 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{\lambda - 1} < \frac{1}{1} \Leftrightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{\lambda - 1} < 1 \Leftrightarrow 1 < \frac{4}{\lambda - 1} < 4 \Leftrightarrow 1 < \Pi < 4.$$

Δ4. α' τρόπος:

$$\left|x_o - \frac{1}{2}\right| + \left|x_o^2 - \frac{1}{4}\right| = 0 \text{ ως άθροισμα μη αρνητικών ποσοτήτων θα πρέπει να}$$

$$\text{ισχύει: } \left|x_o - \frac{1}{2}\right| = 0 \text{ και } \left|x_o^2 - \frac{1}{4}\right| = 0 \text{ δηλαδή:}$$

$$\bullet \left|x_o - \frac{1}{2}\right| = 0 \Leftrightarrow x_o - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x_o = \frac{1}{2}$$

$$\bullet \left|x_o^2 - \frac{1}{4}\right| = 0 \Leftrightarrow x_o^2 - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow x_o^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x_o = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow x_o = \frac{1}{2} \text{ ή } x_o = -\frac{1}{2}$$

Η κοινή τους λύση $x_o = \frac{1}{2}$ αποτελεί και λύση της εξίσωσης.

$$\text{Επειδή έχουμε ότι } x_o = \frac{1}{\lambda - 1}, \text{ θα ισχύει: } \frac{1}{\lambda - 1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda - 1 = 2 \Leftrightarrow \lambda = 3$$

δεκτή.

β' τρόπος:

$$\left|x_o - \frac{1}{2}\right| + \left|x_o^2 - \frac{1}{4}\right| = 0 \Leftrightarrow \left|x_o - \frac{1}{2}\right| + \left|\left(x_o - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x_o + \frac{1}{2}\right)\right| = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left|x_o - \frac{1}{2}\right| + \left|x_o - \frac{1}{2}\right| \cdot \left|x_o + \frac{1}{2}\right| = 0 \Leftrightarrow \left|x_o - \frac{1}{2}\right| \cdot \left(1 + \left|x_o + \frac{1}{2}\right|\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\bullet \left|x_o - \frac{1}{2}\right| = 0 \Leftrightarrow x_o - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x_o = \frac{1}{2} \text{ ή}$$

$$\bullet 1 + \left|x_o + \frac{1}{4}\right| = 0 \Leftrightarrow \left|x_o + \frac{1}{4}\right| = -1 \Leftrightarrow \text{Αδύνατη γιατί το } \left|x_o + \frac{1}{4}\right| \geq 0.$$

Έχουμε λύση την $x_o = \frac{1}{2}$, και αφού $x_o = \frac{1}{\lambda - 1}$, θα ισχύει:

$$\frac{1}{\lambda - 1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda - 1 = 2 \Leftrightarrow \lambda = 3 \text{ δεκτή.}$$