



ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 7 Ιανουαρίου 2023

Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 63 σχολικού βιβλίου

Α2.

Πίνακας 1		
1	2	3
δ	γ	β

Α3. α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε:

- $\pi - 3 > 0$ άρα $|\pi - 3| = \pi - 3$
- $\sqrt{8} - \pi < 0$ άρα $|\sqrt{8} - \pi| = -(\sqrt{8} - \pi) = -\sqrt{8} + \pi$
- $4 - \sqrt{8} > 0$ άρα $|4 - \sqrt{8}| = 4 - \sqrt{8}$

$$\text{Άρα } \alpha = -(\pi - 3) + (-\sqrt{8} + \pi) - (4 - \sqrt{8})$$

$$\alpha = -\pi + 3 - \sqrt{8} + \pi - 4 + \sqrt{8}$$

$$\alpha = -1$$

B2. Έχουμε: $\beta^3 - 64 = 0 \Leftrightarrow \beta^3 = 64$

$$\Leftrightarrow \beta = \sqrt[3]{64}$$

$$\Leftrightarrow \beta = 4$$

B3. Αφού $x \in (\alpha, \beta)$ έχουμε ότι $\alpha < x < \beta$ οπότε $-1 < x < 4$

- $x > -1 \Leftrightarrow x+1 > 0$ άρα $|x+1| = x+1$
- $x < 4 \Leftrightarrow x-4 < 0$ άρα $|x-4| = -(x-4) = -x+4$

Άρα $A = |x+1| + |x-4| = x+1 - x+4 = 5$ δηλαδή ανεξάρτητη του x

B4. Έχουμε: $|x-5| = 10 \Leftrightarrow x-5 = 10$ ή $x-5 = -10$

$$\Leftrightarrow x = 10+5 \text{ ή } x = -10+5$$

$$\Leftrightarrow x = 15 \text{ ή } x = -5$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε: $\lambda^2(x-1) = 2(2x-\lambda) \Leftrightarrow \lambda^2x - \lambda^2 = 4x - 2\lambda$

$$\Leftrightarrow \lambda^2x - 4x = \lambda^2 - 2\lambda$$

$$\Leftrightarrow (\lambda^2 - 4)x = \lambda(\lambda - 2)$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 2)x = \lambda(\lambda - 2)$$

Γ2. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $(\lambda - 2)(\lambda + 2) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda - 2 \neq 0$ και $\lambda + 2 \neq 0$
 $\Leftrightarrow \lambda \neq 2$ και $\lambda \neq -2$

τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = \frac{\lambda(\lambda - 2)}{(\lambda - 2)(\lambda + 2)} = \frac{\lambda}{\lambda + 2}$

- Αν $\lambda = 2$ η εξίσωση (1) γίνεται $0x = 0$ και είναι ταυτότητα.
- Αν $\lambda = -2$ η εξίσωση (1) γίνεται $0x = 8$ και είναι αδύνατη.

Γ3. Για $\lambda = 2$ η δοθείσα εξίσωση γίνεται:

$$\|x-2|-4 = |2-|2-x|| \Leftrightarrow$$

$$|x-2|-4 = 2-|2-x| \quad \text{ή} \quad |x-2|-4 = -(2-|2-x|)$$

Όμως:

- $|x-2|-4 = 2-|2-x| \Leftrightarrow |x-2|+|2-x| = 2+4$
 $\Leftrightarrow 2|x-2| = 6$
 $\Leftrightarrow |x-2| = 3$
 $\Leftrightarrow x-2 = 3 \quad \text{ή} \quad x-2 = -3$
 $\Leftrightarrow x = 5 \quad \text{ή} \quad x = -1$
- $|x-2|-4 = -(2-|2-x|) \Leftrightarrow |x-2|-4 = -2+|2-x|$
 $\Leftrightarrow |x-2|-|2-x| = -2+4$
 $\Leftrightarrow 0 = 2$ Αδύνατη

Γ4. Έχουμε:

$$x_0 = \frac{1}{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{2-\sqrt{2}}$$

$$x_0 = \frac{2-\sqrt{2}}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} + \frac{2+\sqrt{2}}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}$$

$$x_0 = \frac{2-\sqrt{2}+2+\sqrt{2}}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}$$

$$x_0 = \frac{4}{2^2 - \sqrt{2}^2}$$

$$x_0 = \frac{4}{4-2}$$

$$x_0 = 2$$

$$\begin{aligned}\text{Όμως } x_0 = \frac{\lambda}{\lambda+2} &\Leftrightarrow \frac{\lambda}{\lambda+2} = 2 \\ &\Leftrightarrow 2\lambda+4 = \lambda \\ &\Leftrightarrow \lambda = -4\end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$\begin{aligned}\text{α) Έχουμε: } \frac{3\alpha}{\alpha^2-1} &= \frac{2\alpha-1}{\alpha+1} - \frac{\alpha-3}{\alpha-1} \Leftrightarrow \\ \frac{3\alpha}{(\alpha-1)(\alpha+1)} &= \frac{2\alpha-1}{\alpha+1} - \frac{\alpha-3}{\alpha-1} \Leftrightarrow\end{aligned}$$

Η εξίσωση αυτή ορίζεται για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ με $\alpha-1 \neq 0$ και $\alpha+1 \neq 0$
 $\alpha \neq 1$ και $\alpha \neq -1$

Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$(\alpha-1)(\alpha+1) \frac{3\alpha}{(\alpha-1)(\alpha+1)} = (\alpha-1)(\alpha+1) \frac{2\alpha-1}{\alpha+1} - (\alpha-1)(\alpha+1) \frac{\alpha-3}{\alpha-1} \Leftrightarrow$$

$$3\alpha = (\alpha-1)(2\alpha-1) - (\alpha+1)(\alpha-3) \Leftrightarrow$$

$$3\alpha = 2\alpha^2 - \alpha + 2\alpha + 1 - (\alpha^2 - 3\alpha + \alpha - 3) \Leftrightarrow$$

$$3\alpha = 2\alpha^2 - 3\alpha + 1 - \alpha^2 + 3\alpha - \alpha + 3 \Leftrightarrow$$

$$3\alpha = \alpha^2 - \alpha + 4 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 - \alpha - 3\alpha + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha-2)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha = 2 \text{ Δεκτή}$$

$$\beta) \text{ Έχουμε: } \sqrt{\beta^2 - 8\beta + 16} + |\beta^2 - 16| = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(\beta - 4)^2} + |\beta^2 - 16| = 0 \Leftrightarrow$$

$$|\beta - 4| + |\beta^2 - 16| = 0 \Leftrightarrow$$

$$\beta - 4 = 0 \Leftrightarrow \text{ και } \beta^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\beta = 4 \quad \beta^2 = 16 \Leftrightarrow$$

$$\beta = \sqrt{16} \quad \text{ή} \quad \beta = -\sqrt{16}$$

$$\beta = 4 \quad \text{ή} \quad \beta = -4$$

Άρα $\beta = 4$

Δ2.

α) Έχουμε:

$$\gamma = \frac{\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[3]{16}}{2 \cdot \sqrt[12]{2}} = \frac{8^{\frac{1}{4}} \cdot 16^{\frac{1}{3}}}{2 \cdot 2^{\frac{1}{12}}} = \frac{(2^3)^{\frac{1}{4}} \cdot (2^4)^{\frac{1}{3}}}{2^{1+\frac{1}{12}}} = \frac{2^{\frac{3}{4}} \cdot 2^{\frac{4}{3}}}{2^{\frac{13}{12}}} = \frac{2^{\frac{3}{4} + \frac{4}{3}}}{2^{\frac{13}{12}}} = \frac{2^{\frac{25}{12}}}{2^{\frac{13}{12}}} = 2^{\frac{12}{12}} = 2$$

β) Έχουμε:

$$\delta = \left(\frac{\sqrt{27} + \sqrt{18}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{9} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{9} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \right)^2 = \left(\frac{3\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \right)^2 = \left(\frac{3(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \right)^2 = 3^2 = 9$$

Δ3.

i) Έχουμε ότι: $2 \leq x \leq 4$ και $2 \leq y \leq 9$

Η περίμετρος Π του σχήματος είναι:

$$\Pi = AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta E + EZ + ZH + H\Theta + \Theta A$$

$$\Pi = x + (B\Gamma + \Delta E + ZH) + x + x + x + y$$

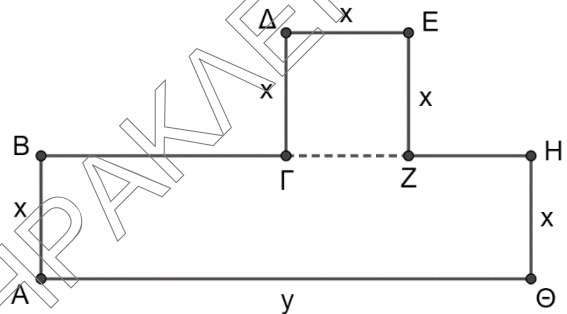
$$\Pi = x + y + x + x + x + y$$

$$\Pi = 4x + 2y$$

Το εμβαδόν E του σχήματος είναι:

$$E = E_{\Delta EZ\Gamma} + E_{B\Theta ZA}$$

$$E = x^2 + xy$$



ii)

Έχουμε: $2 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow 8 \leq 4x \leq 16$ (1)

$$2 \leq y \leq 9 \Leftrightarrow 4 \leq 2y \leq 18$$
 (2)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$8 + 4 \leq 4x + 2y \leq 16 + 18 \Leftrightarrow 12 \leq \Pi \leq 34$$

Επειδή τα μέλη της ανίσωσης $2 \leq x \leq 4$ είναι θετικοί αριθμοί μπορούμε να υψώσουμε στο τετράγωνο, οπότε έχουμε:

$$2^2 \leq x^2 \leq 4^2 \Leftrightarrow 4 \leq x^2 \leq 16$$
 (3)

Επειδή τα μέλη των ανισοτήτων $2 \leq x \leq 4$ και $2 \leq y \leq 9$ είναι θετικοί αριθμοί μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη, οπότε έχουμε:

$$2 \cdot 2 \leq xy \leq 4 \cdot 9 \Leftrightarrow 4 \leq xy \leq 36$$
 (4)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε:

$$4 + 4 \leq x^2 + xy \leq 16 + 36 \Leftrightarrow 8 \leq E \leq 52$$