



**ΤΑΞΗ:** Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ:** ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**Ημερομηνία: Σάββατο 9 Ιανουαρίου 2021**  
**Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες**

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 43 (Ιδιότητες εσωτερικού γινομένου)

**A2. α.** Ψευδής

**β.** Επειδή  $\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$  αφού η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα είναι  $\pi$ .

**A3.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 23 ( Γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων )

**A4.** 1.Λάθος,  
2.Σωστό,  
3.Σωστό,  
4.Λάθος,  
5.Σωστό

### ΘΕΜΑ Β

**B1.** Οι συντεταγμένες της κορυφής Α προκύπτουν από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων των δύο ευθειών

$$\begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ x - 4y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 5 \\ -2x + 8y = 4 \end{cases}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει ότι :  $9y = 9 \Leftrightarrow y = 1$ .

Με αντικατάσταση σε μία από τις δύο αρχικές εξισώσεις προκύπτει ότι  $x = 2$ .  
Άρα  $A(2, 1)$

- B2.** Επειδή η εξίσωση της πλευράς ΒΓ είναι παράλληλη στη (ζ) θα ισχύει ότι  $\lambda_{B\Gamma} = \lambda_z = 3$  και αφού η ΒΓ διέρχεται από το Β έχουμε ότι :

$$y - 4 = 3(x + 2) \Leftrightarrow y = 3x + 10$$

- B3.** Αφού  $B\Delta \perp A\Gamma \Leftrightarrow \lambda_{B\Delta} \cdot \lambda_{A\Gamma} = -1$  και επειδή  $\lambda_{B\Delta} = -1$  προκύπτει ότι

$\lambda_{A\Gamma} = 1$  και αφού η ΑΓ διέρχεται από το Α έχουμε ότι :

$$y - 1 = x - 2 \Leftrightarrow y = x - 1$$

Οι συντεταγμένες της κορυφής Γ προκύπτουν από τη λύση του

συστήματος των εξισώσεων των ευθειών ΑΓ και ΒΓ

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = 3x + 10 \end{cases}$$

Εξισώνοντας τις δύο σχέσεις προκύπτει  $x - 1 = 3x + 10 \Leftrightarrow x = -\frac{11}{2}$ .

Με αντικατάσταση σε μία από τις δύο προκύπτει ότι  $y = -\frac{13}{2}$ .

$$\text{Άρα } \Gamma\left(-\frac{11}{2}, -\frac{13}{2}\right)$$

### ΘΕΜΑ Γ

- Γ1.** Γνωρίζουμε ότι:  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \sin(\widehat{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}})$ , όπου  $0 \leq (\widehat{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}) \leq \pi$  (1).

Απαιτείται να υπολογίσουμε το  $\sin(\widehat{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}})$ . Από την γνωστή

$$\text{τριγωνομετρική ταυτότητα } \sin^2(\widehat{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}) + \eta\mu^2(\widehat{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}) = 1,$$

αν αντικαταστήσουμε  $\eta\mu(\widehat{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}) = \frac{3}{5}$ , προκύπτει  $\sigma\upsilon\nu^2(\widehat{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}) = \frac{16}{25}$  οπότε,  
 $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}) = \frac{4}{5}$  ή  $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}) = -\frac{4}{5}$ . Αντικαθιστούμε στην αρχική σχέση

$$|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 5 \text{ οπότε έχουμε, } \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 4 \text{ ή } \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -4.$$

Επειδή η  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$  είναι οξεία, το  $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}) > 0$ , άρα  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 4$ .

$$\Gamma 2. \quad |5\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = (5\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2 = 25\vec{\alpha}^2 - 10\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 25 - 10 \cdot 4 + 25 = 10.$$

$$\text{Άρα, } |5\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = \sqrt{10}.$$

$$\Gamma 3. \quad \text{Τα διανύσματα } \vec{v} = (\vec{\alpha}\vec{\beta})\vec{\alpha} - x\vec{\beta} = 4\vec{\alpha} - x\vec{\beta}, \vec{\beta} \text{ είναι κάθετα επομένως, } \vec{v} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow (4\vec{\alpha} - x\vec{\beta})\vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow 4\vec{\alpha}\vec{\beta} - x\vec{\beta}^2 = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot 4 - 25x = 0 \Leftrightarrow 16 = 25x \Leftrightarrow x = \frac{16}{25}.$$

#### ΘΕΜΑ Δ

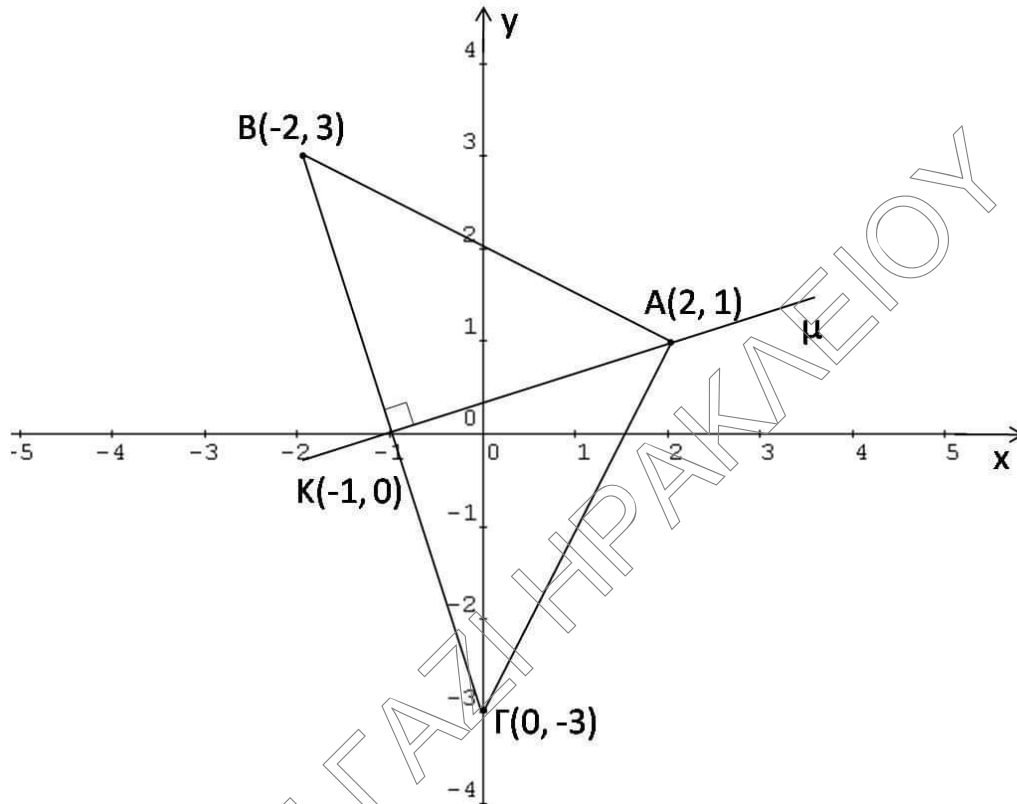
**Δ1.** Το μέσον Κ του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ είναι  $K\left(\frac{x_B+x_G}{2}, \frac{y_B+y_G}{2}\right)$  ή  $K(-1, 0)$ .

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας στην οποία ανήκει η πλευρά ΒΓ

$$\text{είναι : } \lambda_{B\Gamma} = \frac{y_G - y_B}{x_G - x_B} = \frac{-3 - 3}{0 - (-2)} = -3.$$

Αφού  $B\Gamma \perp \mu \Leftrightarrow \lambda_{B\Gamma} \cdot \lambda_\mu = -1 \Leftrightarrow \lambda_\mu = \frac{1}{3}$  και αφού η  $\mu$  διέρχεται

$$\text{από το Κ έχουμε ότι } \mu : y - 0 = \frac{1}{3}(x - (-1)) \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}.$$



Δ2. Αφού το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $\hat{A} = 90^\circ$  ισχύει :

- $AB = A\Gamma$ . Επομένως το  $A$  ισαπέχει από τα σημεία  $B$  και  $\Gamma$ . Άρα βρίσκεται κατ'ανάγκη στη μεσοκάθετη  $\mu$  του ευθυγράμμου τμήματος  $B\Gamma$ . Επομένως οι συντεταγμένες του ικανοποιούν τον τύπο της

$$\mu: y_A = \frac{1}{3}x_A + \frac{1}{3}. \text{ Έτσι είναι } A(x_A, \frac{1}{3}x_A + \frac{1}{3}) \text{ με } x_A > 0.$$

- $\hat{A} = 90^\circ \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{A\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = 0$  (1)

$$\text{Όμως } \overrightarrow{AB} = (-2 - x_A, 3 - \frac{1}{3}x_A - \frac{1}{3}) = (-2 - x_A, -\frac{1}{3}x_A + \frac{8}{3}) \quad (2)$$

$$\text{Όμως } \overrightarrow{A\Gamma} = (0 - x_A, -3 - \frac{1}{3}x_A - \frac{1}{3}) = (-x_A, -\frac{1}{3}x_A - \frac{10}{3}) \quad (3)$$

$$(1) \stackrel{(2),(3)}{\implies} (-2 - x_A)(-x_A) + \frac{1}{3}(8 - x_A)(-\frac{1}{3})(10 + x_A) = 0 \Rightarrow$$

$$2x_A + x_A^2 - \frac{1}{9}(80 + 8x_A - 10x_A - x_A^2) = 0 \Rightarrow x_A^2 + 2x_A - 8 = 0$$

$$\Rightarrow x_A = 2 \text{ ή } x_A = -4$$

Και αφού  $x_A > 0$  είναι  $x_A = 2$  και  $y_A = \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} = 1$ . Άρα **A(2, 1)**

Δ3.  $\vec{MB} \cdot \vec{MG} + \vec{MA}^2 = \vec{MA} \cdot \vec{MB} + \vec{MA} \cdot \vec{MG} \Leftrightarrow$

$$\vec{MB} \cdot \vec{MG} - \vec{MA} \cdot \vec{MG} = \vec{MA} \cdot \vec{MB} - \vec{MA}^2 \Leftrightarrow$$

$$(\vec{MB} - \vec{MA}) \cdot \vec{MG} = \vec{MA} \cdot (\vec{MB} - \vec{MA}) \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{MG} = \vec{MA} \cdot \vec{AB} \Leftrightarrow$$

$$\vec{AB} \cdot (\vec{MG} - \vec{MA}) = 0 \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AG} = 0 \Leftrightarrow \vec{AB} \perp \vec{AG} \text{ που ισχύει από}$$

την υπόθεση. Λόγω των ισοδυναμιών, η αλήθεια της τελευταίας

σημαίνει και την αλήθεια της αρχικής.