ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Πέμπτη 7 Ιανουαρίου 2021
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 62.

Α2. Α-2-(ii)

Α-1-(iii)

Β-3-(i)

Α3. **(α)** $\alpha = 0$ και $\beta = 0$
(β) $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$
(γ) $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$
(δ) $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$

Α4 Ο ισχυρισμός είναι Ψευδής διότι αν για παράδειγμα $\alpha = \frac{1}{4}$ τότε

$$\alpha^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} < \frac{1}{4} = \alpha$$

Α5. **(α)** Σωστό
(β) Σωστό
(γ) Λάθος
(δ) Λάθος
(ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε

$$\kappa=\left|3-\sqrt{17}\right|+\left|5-\sqrt{17}\right|=-3+\sqrt{17}+5-\sqrt{17}=2$$

Διότι $3-\sqrt{17}<0$ αφού $3=\sqrt{9}<\sqrt{17}$ και $5-\sqrt{17}>0$ αφού $5=\sqrt{25}>\sqrt{17}$.

$$\lambda=x^2-(x-3)(x+3)=x^2-x^2+9=9$$

Β2. $|x+\kappa|=\sqrt{\lambda}\Leftrightarrow|x+2|=\sqrt{9}\Leftrightarrow|x+2|=3\Leftrightarrow x+2=3$ ή $x+2=-3$

δηλαδή $x=1$ ή $x=-5$

Β3. $|2x-1|\le\kappa+\sqrt{\lambda}\Leftrightarrow|2x-1|\le 2+\sqrt{9}\Leftrightarrow|2x-1|\le 5\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -5\le 2x-1\le 5\Leftrightarrow -4\le 2x\le 6\Leftrightarrow -2\le x\le 3$

Β4. $x^3-x^2+x-1=0\Leftrightarrow x^2(x-1)+(x-1)=0\Leftrightarrow(x-1)(x^2+1)=0\Leftrightarrow$

$x-1=0\Leftrightarrow x=1$ (που είναι δεκτή) ή $x^2+1=0\Leftrightarrow x^2=-1$ που είναι αδύνατη.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε

$$\alpha=\left(\sqrt{5}-1\right)^2-\left(\sqrt{5}+1\right)^2-4\left(1-\sqrt{5}\right)+5\Leftrightarrow$$

$$\alpha=5-2\sqrt{5}+1-(5+2\sqrt{5}+1)-4+4\sqrt{5}+5\Leftrightarrow$$

$$\alpha=5-2\sqrt{5}+1-5+2\sqrt{5}-1-4+4\sqrt{5}+5\Leftrightarrow\alpha=1$$

$$\beta=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\Leftrightarrow\beta=\frac{\sqrt{8}(\sqrt{6}+\sqrt{2})+\sqrt{24}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$\Leftrightarrow\beta=\frac{\sqrt{48}+\sqrt{16}+\sqrt{144}-\sqrt{48}}{6-2}\Leftrightarrow\beta=\frac{4+12}{4}\Leftrightarrow\beta=4$$

Γ2. Έχουμε ότι $x\in[1,4]$ άρα $1\le x\le 4\Leftrightarrow x-1\ge 0$ και $x-4\le 0$. Άρα

$A=|x-1|-|x-4|+5 \Leftrightarrow A=x-1-(-x+4)+5 \Leftrightarrow$
$A=x-1+x-4+5 \Leftrightarrow A=2x$

$$\frac{4}{A-1}+\frac{2}{A+1}=\frac{A^2+2}{A^2-1} \Leftrightarrow \frac{4}{2x-1}+\frac{2}{2x+1}=\frac{4x^2+2}{4x^2-1}$$

Πρέπει $(2x-1)(2x+1)\neq 0$

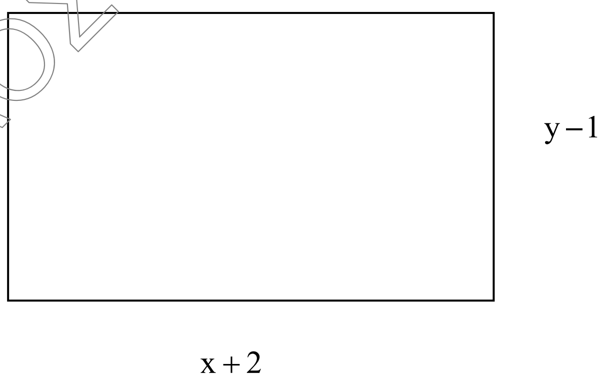
Άρα $2x-1\neq 0$ και $2x+1\neq 0$ δηλαδή $x\neq \frac{1}{2}$ και $x\neq -\frac{1}{2}$ που ισχύουν, αφού $x\in[1,4]$.

Είναι $4(2x+1)+2(2x-1)=4x^2+2 \Leftrightarrow$

$8x+4+4x-2=4x^2+2 \Leftrightarrow 4x^2-12x=0 \Leftrightarrow$

$4x(x-3)=0 \Leftrightarrow x=0$ (απορρίπτεται) ή $x=3$ (δεκτή)

Γ3. Έχουμε ότι $1\leq x\leq 4$ και $2\leq y\leq 8$ καθώς και το σχήμα μας.



Τότε $\Pi=2(x+2)+2(y-1)=2x+4+2y-2=2x+2y+2=2(x+y+1)$

και $E=(x+2)(y-1)$.

Αφού έχουμε ότι $1\leq x\leq 4$ και $2\leq y\leq 8$ προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε ότι $3\leq x+y\leq 12 \Leftrightarrow 4\leq x+y+1\leq 13 \Leftrightarrow 8\leq 2(x+y+1)\leq 26 \Leftrightarrow 8\leq \Pi\leq 26$.

Ομοίως, έχουμε ότι $1\leq x\leq 4$ και $2\leq y\leq 8$, άρα $3\leq x+2\leq 6$ και $1\leq y-1\leq 7$. Επομένως, $3\leq (x+2)(y-1)\leq 42$ άρα $3\leq E\leq 42$.

$3 \le x+y \le 12 \Leftrightarrow 4 \le x+y+1 \le 13 \Leftrightarrow 2>0$

Γ4. Έχουμε ότι $1 \le x \le 4$ οπότε η εξίσωση γίνεται .

$A^3 = -27 \Leftrightarrow A = -\sqrt[3]{|-27|} \Leftrightarrow A=-3 \Leftrightarrow 2x=-3 \Leftrightarrow$

$x = -\frac{3}{2}$ Αδύνατη αφού $x \in [1,4]$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε

$\lambda^4 x - \lambda^3 = x - \lambda \Leftrightarrow \lambda^4 x - x = \lambda^3 - \lambda \Leftrightarrow$

$(\lambda^4-1)x = \lambda(\lambda^2-1) \Leftrightarrow (\lambda^2-1)(\lambda^2+1)x = \lambda(\lambda-1)(\lambda+1) \Leftrightarrow$

$(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda^2+1)x = \lambda(\lambda-1)(\lambda+1) \quad (A)$

Η εξίσωση είναι αδύνατη, όταν :

$(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda^2+1) = 0 \quad (1)$ και $\lambda(\lambda-1)(\lambda+1) \ne 0 \quad (2)$

Η εξίσωση (1) ισχύει μόνο όταν $\lambda = 1$ ή $\lambda = -1$

Η εξίσωση (2) ισχύει μόνο όταν $\lambda \ne 0$ και $\lambda \ne 1$ και $\lambda \ne -1$

Άρα δεν υπάρχει τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύουν ταυτόχρονα οι (1) και (2) επομένως η εξίσωση (Α) δεν είναι αδύνατη.

Η εξίσωση (Α) έχει μοναδική λύση, όταν :

$(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda^2+1) \ne 0 \Leftrightarrow \lambda \ne 1$ και $\lambda \ne -1$ και $\lambda^2 \ne -1$(που ισχύει)

Η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι η $x_0 = \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)}{(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda^2+1)} \Leftrightarrow x_o = \frac{\lambda}{\lambda^2+1}$

Δ2. Έχουμε

$|x_0| \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left|\frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right| \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{|\lambda|}{|\lambda^2+1|} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \qquad (\lambda^2+1>0)$

$\frac{|\lambda|}{\lambda^2+1} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow (\lambda^2+1>0) \Leftrightarrow 2|\lambda| \le \lambda^2+1 \Leftrightarrow |\lambda|^2 - 2|\lambda| + 1 \ge 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (|\lambda|-1)^2 \ge 0$, ισχύει για $\lambda \ne 1$ και $\lambda \ne -1$.

Δ3. Η εξίσωση είναι ταυτότητα όταν ,

$(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda^2+1)=0 \Leftrightarrow$ και $\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)=0 \Leftrightarrow$

$\lambda-1=0 \Leftrightarrow$ ή $\lambda+1=0 \Leftrightarrow$ ή $\lambda^2+1=0 \Leftrightarrow$ $\quad$ $\lambda=0$ ή $\lambda-1=0 \Leftrightarrow$ ή $\lambda+1=0 \Leftrightarrow$

$\lambda=1$ $\quad$ $\lambda=-1$ $\quad$ $\lambda^2=-1$ $\quad$ $\lambda=1$ $\quad$ $\lambda=-1$

Αδύνατη

οπότε για τις τιμές $\lambda=1$ ή $\lambda=-1$ είναι ταυτότητα .

Για να ορίζεται η $\sqrt[-3\lambda_1]{5}$, πρέπει -3λ$_1$ να είναι θετικός ακέραιος οπότε $\lambda_1=-1$ και άρα $\lambda_2=1$.

Έχουμε

$\sqrt{\lambda_2^2-\lambda_1^3+1}=\sqrt{1^2-(-1)^3+1}=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$ και $\sqrt[-3\lambda_1]{5}=\sqrt[3]{5}$.

Είναι
$$\sqrt[3]{5}=\sqrt[6]{5^2}=\sqrt[6]{25}$$
$$\sqrt{3}=\sqrt[6]{3^3}=\sqrt[6]{27}$$

Αφού $27>25$ άρα $\sqrt[6]{27}\geq\sqrt[6]{25}$, οπότε $\sqrt{3}>\sqrt[3]{5}$.

Δ4. Έχουμε

$\lambda_2+|4x_0+1|=1-|16x_0{}^2-1| \Leftrightarrow \;(\lambda_2=-1)$

$|4x_0+1|=-|4x_0+1|\cdot|4x_0+1| \Leftrightarrow$

$|4x_0+1|+|4x_0+1|\cdot|4x_0+1|=0 \Leftrightarrow$

$|4x_0+1|\cdot(1+|4x_0+1|)=0 \Leftrightarrow$

$|4x_0+1|=0$ ή $1+|4x_0+1|=0$

$4x_0+1=0$ $\quad$ $|4x_0+1|=-1$

$x_0=-\dfrac{1}{4}$ $\quad$ Αδύνατη