



ΤΑΞΗ: Α' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Μ. Τετάρτη 28 Απριλίου 2021
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 90

Α2.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1			
1	2	3	4
Γ	Α	Δ	Β

- Α3. (α) Σωστό
(β) Σωστό
(γ) Σωστό
(δ) Λάθος
(ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 - 6x + 5$ είναι $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 \Leftrightarrow \Delta = 36 - 20 \Leftrightarrow \Delta = 16$ επομένως το τριώνυμο έχει δύο ρίζες

πραγματικές και άνισες τις $x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 4}{2} \begin{cases} x = 5 \\ \text{ή} \\ x = 1 \end{cases}$, και το πρόσημό του

φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί :

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$	
$x^2 - 5x + 6$	+	○	-	○	+

Οπότε $x^2 - 6x + 5 > 0$ όταν $x \in (-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$

B2.

Η ανίσωση $|2x + 4| \leq 16$ ισοδύναμα γίνεται :

$$|2x + 4| \leq 16 \Leftrightarrow -16 \leq 2x + 4 \leq 16 \Leftrightarrow -16 - 4 \leq 2x + 4 - 4 \leq 16 - 4 \Leftrightarrow -20 \leq 2x \leq 12 \Leftrightarrow -10 \leq x \leq 6$$

Ο αριθμός $\alpha = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} + \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} + \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{7} - \sqrt{5})}{(\sqrt{7} + \sqrt{5})(\sqrt{7} - \sqrt{5})} + \frac{\sqrt{7}(\sqrt{7} + \sqrt{5})}{(\sqrt{7} - \sqrt{5})(\sqrt{7} + \sqrt{5})} \\ &= \frac{\sqrt{35} - \sqrt{5}^2}{\sqrt{7}^2 - \sqrt{5}^2} + \frac{\sqrt{7}^2 + \sqrt{35}}{\sqrt{7}^2 - \sqrt{5}^2} = \frac{\sqrt{35} - 5}{2} + \frac{7 + \sqrt{35}}{2} = \frac{2\sqrt{35} + 2}{2} = \frac{2(\sqrt{35} + 1)}{2} = 1 + \sqrt{35} \end{aligned}$$

Άρα ο αριθμός $\alpha = 1 + \sqrt{35}$ δεν ανήκει στο σύνολο λύσεων της ανίσωσης $|2x + 4| \leq 16$

B3.

Έχουμε :

$$x^2 - 7|x| + 12 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 - 7|x| + 12 = 0$$

Θέτουμε $|x| = w \geq 0$ άρα $w^2 - 7w + 12 = 0$, η οποία έχει ρίζες τους αριθμούς 3 και 4

$$\text{Άρα } |x| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \text{ή} \\ x = -3 \end{cases} \text{ και } |x| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ \text{ή} \\ x = -4 \end{cases}$$

Από τις 4 λύσεις που βρήκαμε μόνο η $x = -3$ και η $x = -4$ ανήκουν στο σύνολο λύσεων της

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Εφόσον η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(\alpha+1, 4)$ τότε ισχύει :

$$f(\alpha+1) = 4 \Leftrightarrow \frac{(\alpha+1)^2 + \alpha(\alpha+1) - 2}{\alpha+1-\alpha} = 4 \Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha + 1 + \alpha^2 + \alpha - 2 = 4$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha^2 + 3\alpha - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \text{ή} \\ \alpha = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Από υπόθεση όμως $\alpha > 0$ οπότε η λύση $\alpha = 1$ είναι δεκτή ενώ η $\alpha = -\frac{5}{2}$ απορρίπτεται

Για $\alpha = 1$ η συνάρτηση είναι $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ και για να ορίζεται πρέπει $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

Άρα $A = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

Γ2.

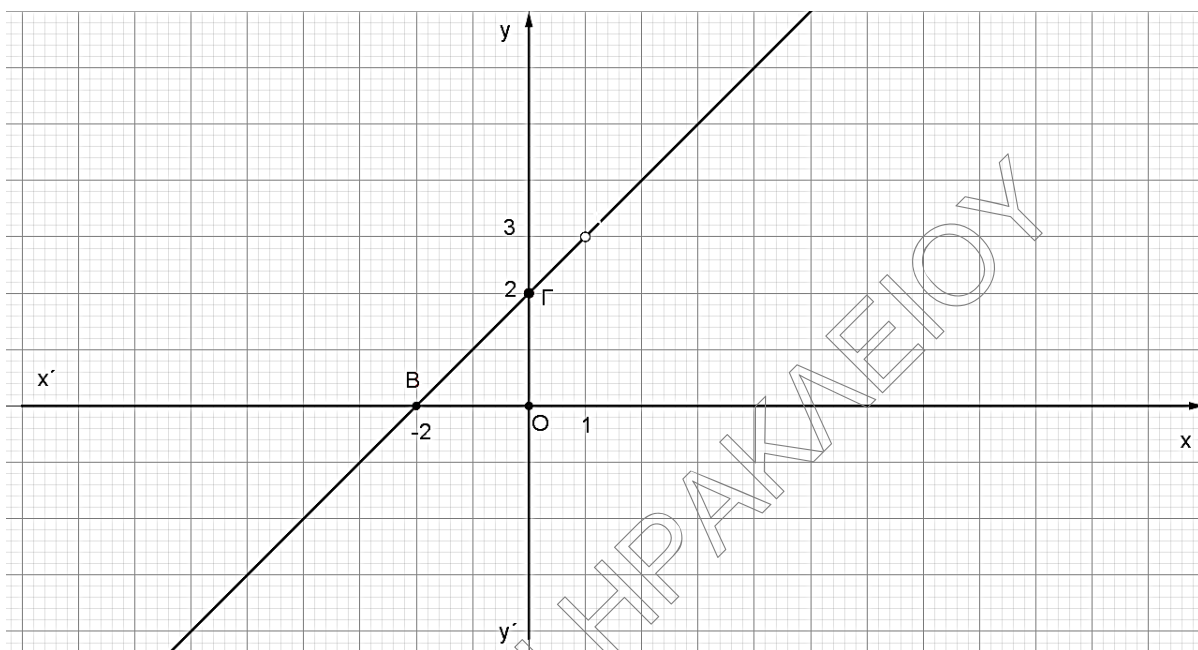
(i) Για κάθε $x \neq 1$ έχουμε : $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = x+2$

Άρα $f(x) = x+2, x \in A$

Για να βρούμε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$ αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Άρα τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(-2, 0)$, επειδή ο αριθμός 0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της τότε τέμνει και τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Gamma(0, f(0))$ δηλαδή στο σημείο $\Gamma(0, 2)$

(ii) Η γραφική παράσταση της f είναι ευθεία η οποία διέρχεται από τα σημεία B και Γ με εξαίρεση το σημείο $(1, 3)$, η γραφική της παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα :



Γ3.

$$(f(x)-2)^4 + 3(f(x)-2)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2-2)^4 + 3(x+2-2)^2 - 4 = 0$$

$\Leftrightarrow x^4 + 3x^2 - 4 = 0$, θέτουμε $x^2 = w \geq 0$ άρα $w^2 + 3w - 4 = 0$ η οποία έχει ρίζες τους αριθμούς -4 και 1 από τις οποίες η $w = -4$ απορρίπτεται λόγω περιορισμού

Άρα $x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \text{ή} \\ x = -1 \end{cases}$, όμως $x \in A = \mathbb{R} - \{1\}$ οπότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την

$$x = -1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

(i) Για το τριώνυμο $(\lambda - 2)x^2 - 2\lambda x + 2\lambda - 3$, $x \in \mathbb{R}$ και $\lambda \in \mathbb{R} - \{2\}$ μια παράμετρος

$$\Delta = (-2\lambda)^2 - 4 \cdot (\lambda - 2) \cdot (2\lambda - 3) = 4\lambda^2 - 4(2\lambda^2 - 3\lambda - 4\lambda + 6)$$

$$= 4\lambda^2 - 4(2\lambda^2 - 7\lambda + 6) = 4\lambda^2 - 8\lambda^2 + 28\lambda - 24 = -4\lambda^2 + 28\lambda - 24$$

(ii) Για να έχει η εξίσωση $(\lambda - 2)x^2 - 2\lambda x + 2\lambda - 3 = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και

άνισες πρέπει $\Delta > 0$ δηλαδή $-4\lambda^2 + 28\lambda - 24 > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 7\lambda + 6 < 0$,

επομένως θα βρούμε το πρόσημο του τριωνύμου $\lambda^2 - 7\lambda + 6$, με $\lambda \neq 2$ και θα κρατήσουμε το διάστημα στο οποίο είναι αρνητικό.

Το τριώνυμο $\lambda^2 - 7\lambda + 6$ έχει ρίζες του αριθμούς 1 και 6 και το πρόσημο του με τον περιορισμό $\lambda \neq 2$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

λ	$-\infty$	1	2	6	$+\infty$
$\lambda^2 - 7\lambda + 6$	+	○	-	-	+

Άρα $\lambda(1,2) \cup (2,6)$

Δ2. Για να ισχύει $(\lambda - 2)x^2 - 2\lambda x + 2\lambda - 3 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ πρέπει :

$$\Delta < 0 \text{ και } \lambda - 2 > 0 \text{ δηλαδή : } -4\lambda^2 + 28\lambda - 24 < 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda^2 - 7\lambda + 6 > 0} \text{ και } \boxed{\lambda > 2}$$

Επομένως $\lambda < 1$ ή $\lambda > 6$ και $\lambda > 2$, συναληθεύοντας προκύπτει $\lambda > 6$

Δ3.

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= \left(\frac{2\lambda}{(\lambda-2)^2} \right) \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = \frac{2\lambda}{(\lambda-2)^2} \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \left(\frac{2\lambda}{\lambda-2} \right)^2 - 2 \frac{2\lambda-3}{\lambda-2} = \frac{2\lambda}{(\lambda-2)^2} \\ \Leftrightarrow \frac{4\lambda^2}{(\lambda-2)^2} - \frac{4\lambda-6}{\lambda-2} &= \frac{2\lambda}{(\lambda-2)^2} \Leftrightarrow 4\lambda^2 - (\lambda-2)(4\lambda-6) = 2\lambda \Leftrightarrow 4\lambda^2 - (4\lambda^2 - 6\lambda - 8\lambda + 12) = 2\lambda \\ 4\lambda^2 - 4\lambda^2 + 14\lambda - 12 &= 2\lambda \Leftrightarrow 12\lambda = 12 \Leftrightarrow \lambda = 1 \end{aligned}$$

(*) Στο τριώνυμο $(\lambda - 2)x^2 - 2\lambda x + 2\lambda - 3$, έχουμε $\alpha = \lambda - 2, \beta = -2\lambda, \gamma = 2\lambda - 3$ και

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = \frac{2\lambda}{\lambda-2}, \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{2\lambda-3}{\lambda-2}$$