ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ’ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 16/06/2021

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 135.

Α2. Σχολικό Βιβλίο σελ. 51. $f'(x)=e^{1-x}(1-x)$

Α3. Σχολικό Βιβλίο σελ. 23.

Α4. α) Σ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Σ **ε)** Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Θέτω **:**

$x+1=y \Leftrightarrow x=y-1$

$f(y)=y\cdot e^{-(y-1)} \Leftrightarrow f(y)=y\cdot e^{1-y}$

. Άρα, $f(x)=x\cdot e^{1-x}, x\in\mathbb{R}$

Β2. Ισχύει ότι : $f'(x)=e^{1-x}(1-x)$. Λύνουμε $f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{1-x}(1-x)=0 \Leftrightarrow x=1$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow x<1$

Καταλήγουμε στο συμπέρασμα : $f'(x)<0 \Leftrightarrow x>1$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$. Παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x_0=1$ το $f(1)=1$.

Β3. Ισχύει ότι : $f''(x)=-e^{1-x}(2-x)$. Λύνουμε

$f''(x)=0 \Leftrightarrow -e^{1-x}(2-x)=0 \Leftrightarrow x=2$

Καταλήγουμε στο συμπέρασμα : $\begin{array}{l} f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2 \\ f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 2 \end{array}$, οπότε η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 2]$ και κυρτή στο διάστημα $[2, +\infty)$.

Παρουσιάζει Σημείο Καμπής το $(2, \frac{2}{e})$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$,άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Θα ελέγξουμε για πλάγιες-οριζόντιες.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x \cdot e^{1-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e}{e^x} = 0$, διότι $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$. Επίσης ,

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x \cdot e^{1-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x \cdot e}{e^x} \underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{e}{e^x} = 0$. Οπότε η ευθεία y=0 είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x \cdot e^{1-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e}{e^x} = +\infty$, οπότε δεν έχουμε ούτε πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

B4. (i) Ισχύει ότι : $\begin{array}{l} \Delta_1 = (-\infty, 1],\ f \uparrow \\ \Delta_2 = (1, +\infty),\ f \downarrow \end{array}$, οπότε $\begin{array}{l} f(\Delta_1) = (\lim_{x\to-\infty} f(x), f(1)] = (-\infty, 1] \\ f(\Delta_2) = (\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to1^+} f(x)) = (0, 1) \end{array}$,

διότι $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x \cdot e^{1-x}) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x \cdot e}{e^x} = -\infty, (\lim_{x\to-\infty} x = -\infty, \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty)$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ από το B3 ερώτημα.

Συνεπώς, $f(\Delta) = (-\infty, 1] \cup (0, 1) = (-\infty, 1]$

(ii) Από το Σύνολο Τιμών καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα για την εξίσωση f(x)=λ :

- αν $\lambda \geq 0$ έχουμε μια ρίζα για την εξίσωση
- αν $0 < \lambda < 1$ έχουμε δύο ρίζες για την εξίσωση
- αν $\lambda = 1$, έχουμε μία ρίζα επίσης
- αν $\lambda > 1$, είναι αδύνατη.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για $x<0$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική. Για $0<x\le\frac{3\pi}{2}$, επίσης συνεχής ως πολυωνυμικη. Για $x_0=0$ ισχύει ότι

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(ax^3-3x^2-x+1)=1$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\sigma\upsilon\nu x=1$

$f(0)=1$

, άρα f συνεχής στο 1.

Επίσης : $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax^3-3x^2-x+1-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}(ax^2-3x-1)=-1$

$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$, οπότε η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Γ2. (i) Η f είναι συνεχής στο $[0,\frac{3\pi}{2}]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,\frac{3\pi}{2})$, $f(0)=1$ και $f(\frac{3\pi}{2})=0$, άρα $f(0)\ne f(\frac{3\pi}{2})$, οπότε η f δεν ικανοποιεί το Θεώρημα Rolle στο διάστημα $[0,\frac{3\pi}{2}]$.

(ii) Για $x\in(0,\frac{3\pi}{2}]$, η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=-\eta\mu x$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow -\eta\mu x=0\Leftrightarrow x=\kappa\pi,\kappa\in\mathbb{Z}$. Ισχύουν τα παρακάτω :

$0<x<\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow 0<\kappa\pi<\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow 0<\kappa<\frac{3}{2}$, οπότε κ=1.

Για κ=1 ισχύει x=π, άρα υπάρχει μοναδικό $\xi\in(0,\frac{3\pi}{2})$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi)=0$.

Γ3. Για x<0,η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x)=3ax^2-6x-1$. Δ=36+12α=12(3+α)<0, διότι α<-3 δηλαδη α+3<0. Οπότε $f'(x)<0$ για κάθε x<0. Άρα, δεν υπάρχουν σημεία της C_f με εφαπτομένη παράλληλη στον x'x.

Γ4. Για x<0, $f'(x)<0$ και f συνεχής στο $(-\infty,0]$, άρα $f\downarrow$ στο διάστημα αυτό.

Για $x\in(0,\frac{\pi}{2}]$ ισχύουν τα εξής : $\begin{array}{l} 0<x<\pi, \eta\mu x>0 \Leftrightarrow f'(x)<0 \\ \pi<x<\frac{3\pi}{2}, \eta\mu x<0 \Leftrightarrow f'(x)>0 \end{array}$. Οπότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο π και τοπικό μέγιστο στο $\frac{3\pi}{2}$.

Το σύνολο τιμών της f είναι :

$$\left.\begin{array}{l} f((-\infty,\pi])=[-1,+\infty) \\ f((\pi,\frac{3\pi}{2}])=(-1,0] \end{array}\right\} \Leftrightarrow [-1,+\infty)\cup(-1,0]=[-1,+\infty)$$ **(1),**

διότι $\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(ax^3)=+\infty \\ f(\pi)=-1,\ f(\frac{3\pi}{2})=0 \end{array}$

Από (1) , $f(x)\geq-1$**.**

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρώ $k(x)=lnx-\frac{1}{x}$

- συνεχής στο [1,e]
- $k(1)=\ln 1-1=-1$ και $k(e)=lne-\frac{1}{e}=1-\frac{1}{e}$ άρα k(1)k(e)<0

άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1,e)$ τέτοιο ώστε $k(x_0)=0$.

Ειπλέον ισχύει $k'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0\,\sigma\tau o\,(1,e)$ άρα γνησίως αύξουσα άρα το παραπάνω x_0 είναι μοναδικό.

Δ2. $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x_0}-\frac{1}{x}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}=\frac{1}{x_0} \Leftrightarrow x=x_0$ άρα το x_0 κίρσιμο σημείο.

Επιπλέον $f'(x)=\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x}=\frac{x-x_0}{x x_0}$ άρα το πρόσημο θα καθοριστεί από το $x-x_0\,\varepsilon\varphi \acute{o}\sigma o\nu\, x\, x_0>0\,\sigma\tau o\,(0,\infty)$

άρα

x	∞	0	x_0	∞
$x-x_0$	Δεν ορίζεται	-	+	
f’(x)	Δεν ορίζεται	-	+	
f(x)	Δεν ορίζεται	φθίνουσα	αύξουσα	

Άρα παρουσιάζει στο x_0 ολικό ελάχιστο με

$$f(x_0)=\ln x_0(x_0+1)-\ln x_0-1 \Leftrightarrow \frac{x_0+1}{x_0}-\frac{1}{x_0}-1=1-1=0$$

Δ3. Μετασχηματίζω τις συναρτήσεις σύμφωνα με την ιδιότητα των λογαρίθμων

$$g(x)=x\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{lnx}\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{lnx-x}$$

$$h(x)=\mathrm{e}^{(x+1)(\ln(x_0-1))¿}$$

και τα κοινά σημεία βρίσκονται μέσω της επίλυσης του συστήματος

$$h(x)=g(x)\Leftrightarrow \mathrm{e}^{(x+1)(\ln x_0-1)}=\mathrm{e}^{lnx-x}\Leftrightarrow (x+1)(\ln x_0-1)=lnx-x\Leftrightarrow (x+1)\ln x_0-x-1=lnx-x$$

$\Leftrightarrow (x+1)\ln x_0-1=lnx\Leftrightarrow f(x)=0$ που έχουμε από Δ2 ότι υπάρχει μοναδική ρίζα το x_0 άρα αυτό είναι το μοναδικό κοινό σημείο.

Για να δείξω ότι έχουν κοινές εφπτομένες αρκεί να δείξω ότι έχουν ίδιους συντελεστές διαέυθυνσης στο σημείο επαφής x_0 άρα αρκεί να δειξω ότι $g'(x_0)=h'(x_0)$ όπου

$g'(x_0)=(\frac{1}{x_0}-1)\mathrm{e}^{\ln x_0-x_0}$ και

$$h'(x_0)=\ln(x_0-1)\mathrm{e}^{(x+1)(\ln x_0-1)}=(\frac{1}{x_0}-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{lnx_0}\ln x_0-x_0+\ln x_0-1}=g'(x_0)$$

Δ4. (AB)= $\sqrt{\varphi(x)-f(x)^2}=|\varphi(x)-f(x)|=f(x)-\varphi(x)\, εφόσον\, f(x)>\varphi(x)¿$

άρα θεωρώ $d(x)=f(x)-\varphi(x), x>0$ και εφόσον παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 ισχύει\, d(x)\geqslant d(x_0)$

άρα

$$f(x)-\varphi(x)\geqslant f(x_0)-\varphi(x_0)\Leftrightarrow \varphi(x)-\varphi(x_0)\leqslant f(x)-f(x_0)$$

για $0<x<x_0$ η φορά θα αλλάξει και θα έχουμε

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}\geqslant\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0 αριστερα}¿(\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0})\geqslant \lim_{x\to x_0 αριστερά}(\frac{\check{f}(x)-f(x_0)}{x-x_0})=f'(x_0)=0$$

για $x > x_0$ η φορά παραμένει και έχουμε

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0} \leqslant \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0 \delta\varepsilon\xi\iota\acute{\alpha}} \left(\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}\right) \leqslant \lim_{x \to x_0 \delta\varepsilon\xi\iota\acute{\alpha}} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) = f'(x_0) = 0$$

άρα αν η φ(x) είναι παραγωγίσιμη τότε θα ισχύει

άρα κρίσιμο σημείο.

Αν η φ(x) δεν είναι παραγωγίσιμη τότε έχουμε από εκφώνηση ότι είναι συνεχής άρα συνεχής και στο x_0 άρα από ορισμό κρίσιμων σημείων θα είναι εφόσον το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της θα είναι και κρίσιμο.

Επιμέλεια: Μαλλιαράκης Αντώνης
Δασκαλάκη Δήμητρα
Φαρσάρη Ζαχαρένια
Δασκαλάκη Μαρία-Όλγα