ΤΑΞΗ: **3η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ. (Α΄ ΟΜΑΔΑ)**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

Ημερομηνία: Κυριακή 3 Μαΐου 2015

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω συνάρτηση $f:\Delta \to \mathbb{R}$, όπου Δ διάστημα του $\mathbb{R}$. Αν υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $F:\Delta \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε: $F'(x)=f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η F λέγεται παράγουσα συνάρτηση της f στο διάστημα Δ.

Α2.

1. Σ
2. Λ
3. Λ
4. Σ
5. Σ

Α3.

1. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell_1$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\ell_2$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right]=\ell_1-\ell_2$.
2. Αν $x>0$, τότε $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.
3. Αν $\alpha<\beta$ και c = πραγματικός αριθμός, τότε $\int_\alpha^\beta c\,dx = c\cdot(\beta-\alpha)$.
4. $CV=\dfrac{s}{\bar{x}}\cdot 100\%$.
5. $\int_\alpha^\beta \dfrac{g'(x)}{g^2(x)}dx=\left[-\dfrac{1}{g(x)}\right]_\alpha^\beta$.

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Αριθμός ωρών x_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Συχνότητα v_i	K_i	$K_i \cdot v_i$	$\left(\bar{x}-x_i\right)^2$	$v_i\left(\bar{x}-x_i\right)^2$
[0,2)	10	4	1	4	25	100
[2,4)	20	8	3	24	9	72
[4,6)	*15*	6	5	30	1	6
[6,8)	20	8	7	56	1	8
[8,10)	35	14	9	126	9	126
ΣΥΝΟΛΑ	100	40		240		312

$$f_1\%+f_2\%+f_3\%+f_4\%+f_5\%=100 \Leftrightarrow 10+20+f_3\%+20+35=100 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f_3\%=100-10-20-20-35 \Leftrightarrow f_3\%=15$$
$$v_1=f_1\cdot v=0{,}10\cdot 40=4,\ v_2=f_2\cdot v=0{,}20\cdot 40=8,\ v_3=f_3\cdot v=0{,}15\cdot 40=6$$
$$v_4=f_4\cdot v=0{,}20\cdot 40=8,\ v_5=f_5\cdot v=0{,}35\cdot 40=14$$

Β2. $\bar{x}=\dfrac{240}{40}=6$

Β3. $s^2=\dfrac{312}{40}=7{,}8$

Β4. $\bar{x}_{ολ}=\dfrac{240+8\cdot 60}{40+60}=\dfrac{240+480}{100}=\dfrac{720}{100}=7{,}2$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{3-3\sqrt{x}}{2x^2-x-1}=\ldots=\dfrac{0}{0}$ (Απροσδιόριστη Μορφή)

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\left(3-3\sqrt{x}\right)\left(3+3\sqrt{x}\right)}{2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(3+3\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{3^2-\left(3\sqrt{x}\right)^2}{2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(3+3\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{9-9x}{2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(3+3\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{-9(x-1)}{2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(3+3\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to1^-}\frac{-9}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(3+3\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\frac{-9}{2\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(3+3\sqrt{1}\right)}=\frac{-9}{(2+1)6}=\frac{-9}{18}=-\frac{1}{2}=$$

$2x^2-x-1=2(x-1)(x+\frac{1}{2})$, αφού η εξίσωση $2x^2-x-1=0$ έχει ρίζες $x=1,\ x=-\frac{1}{2}$

Γ2. $$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\left[-\frac{1}{2}e^{x-1}+\ln(2-x)\right]=-\frac{1}{2}e^{1-1}+\ln(2-1)=-\frac{1}{2}e^{0}+\ln1=-\frac{1}{2}$$

Γ3. Αφού η f είναι συνεχής στο x=1, θα ισχύει:
$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^+}f(x)=f(1)$ ***(1)***

(1) => $$f(1)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \kappa^2-\kappa-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \kappa^2-\kappa-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow \kappa^2-\kappa=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \kappa(\kappa-1)=0\Rightarrow\begin{cases}\kappa=0\\ \kappa-1=0\Leftrightarrow\kappa=1\end{cases}$$

Γ4. Από τον 3ο κλάδο (για x < 1) θα υπολογίσουμε την παράγωγο:

$$f'(x)=-\frac{1}{2}\left(e^{x-1}\right)'+\left[\ln(2-x)\right]'=-\frac{1}{2}e^{x-1}(x-1)'+\frac{1}{2-x}(2-x)'=$$

$$=-\frac{1}{2}e^{x-1}\cdot1+\frac{1}{2-x}\cdot(-1)=-\frac{1}{2}e^{x-1}-\frac{1}{2-x}$$

$$f'(-1)=-\frac{1}{2}e^{-1-1}-\frac{1}{2-(-1)}=-\frac{1}{2}e^{-2}-\frac{1}{2+1}=-\frac{1}{2e^2}-\frac{1}{3}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$f'(x)=\alpha\frac{\left(e^x\right)'\cdot\left(x^2+2\right)-e^x\cdot\left(x^2+2\right)'}{\left(x^2+2\right)^2}=\alpha\frac{e^x\cdot\left(x^2+2\right)-e^x\cdot2x}{\left(x^2+2\right)^2}=\alpha\frac{e^x\cdot\left(x^2-2x+2\right)}{\left(x^2+2\right)^2}$$

$$f'(0)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\alpha\frac{e^0\cdot\left(0^2-2\cdot0+2\right)}{\left(0^2+2\right)^2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\alpha\frac{1\cdot2}{4}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow4\alpha=4\Leftrightarrow\alpha=1$$

Δ2. Παρατηρούμε ότι $f'(x)=\dfrac{e^x\cdot\left(x^2-2x+2\right)}{\left(x^2+2\right)^2}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αφού $e^x>0$ και $x^2-2x+2>0$ (για την εξίσωση, έχουμε Δ= –4 < 0). Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

Δ3. Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, θα είναι και γνησίως αύξουσα στο $\left[e,\pi\right]$. Επειδή $e<\pi\Rightarrow f(e)<f(\pi)$.

Δ4. $g(x)=\left(x-1\right)\left(x^2+2\right)\dfrac{e^x}{x^2+2}\Leftrightarrow g(x)=\left(x-1\right)e^x$

Το εμβαδόν θα δίνεται από τον τύπο $E=\int_0^1\left|g(x)\right|dx$.

$g(x)=0\Leftrightarrow\left(x-1\right)e^x=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$

Η παράσταση $x-1<0$ για κάθε $x\in\left[0,1\right]$, $e^x>0$ πάντα.

Άρα $g(x)<0$ στο $\left[0,1\right]$.

$$E=\int_0^1\left|g(x)\right|dx=-\int_0^1\left(x-1\right)e^xdx=-\int_0^1(x-1)(e^x)'dx=-\left[\left(x-1\right)e^x\right]_0^1+\int_0^1\left(x-1\right)'e^xdx=$$

$$=-\left[\left(1-1\right)e^1-\left(0-1\right)e^0\right]+\int_0^1e^xdx=-\left(0+1\right)+\left[e^x\right]_0^1=-1+e^1-e^0=-1+e-1=e-2\ \text{τ.μ.}$$