ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

Ημερομηνία: Κυριακή 21 Απριλίου 2013
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α.1. Θεωρία Σχολικό Βιβλίο (έκδοση 2011) σελίδα 45.

Α.2. Θεωρία Σχολικό Βιβλίο (έκδοση 2011) σελίδα 100.

Α.3. Θεωρία Σχολικό Βιβλίο (έκδοση 2011) σελίδα 38.

Α.4.
- **i.** Λάθος
- **ii.** Σωστό
- **iii.** Λάθος
- **iv.** Λάθος
- **v.** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β.1. Έχουμε $\overrightarrow{AB}=\left(2-1,-1+\dfrac{3}{2}\right)=\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$ και $\overrightarrow{B\Gamma}=\left(\kappa-2,\dfrac{\kappa-4}{2}+1\right)=\left(\kappa-2,\dfrac{\kappa-2}{2}\right)$

Είναι $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{B\Gamma}\right)=\begin{vmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \kappa-2 & \frac{\kappa-2}{2}\end{vmatrix}=\dfrac{\kappa-2}{2}-\dfrac{\kappa-2}{2}=0$, οπότε $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{B\Gamma}$.

Επειδή τα διανύσματα $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{B\Gamma}$ έχουν κοινό το σημείο B, τότε έχουν τον ίδιο φορέα. Έτσι, τα A, B και Γ είναι συνευθειακά.

Β.2. Είναι $\overrightarrow{AB}=\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$ και $\overrightarrow{BO}=(-2,1)$. Έχουμε $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BO}=-2+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{3}{2}<0$,

άρα $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BO}}\right)<0$. Οπότε η γωνία $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BO}}\right)$ είναι αμβλεία.

Β.3. Είναι $\overrightarrow{AB}=\left(1,\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{A\Gamma}=\left(\kappa-1,\frac{\kappa-4}{2}+\frac{3}{2}\right)=\left(\kappa-1,\frac{\kappa-1}{2}\right)$ και $\overrightarrow{B\Gamma}=\left(\kappa-2,\frac{\kappa-2}{2}\right)$.

Άρα $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=\kappa-1+\frac{\kappa-1}{4}=\frac{5\kappa-5}{4}$ και $\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|^2=(\kappa-2)^2+\frac{(\kappa-2)^2}{4}=\frac{5(\kappa-2)^2}{4}$.

Πρέπει $\frac{5\kappa-5}{4}=2\cdot\frac{5(\kappa-2)^2}{4}\Leftrightarrow \kappa-1=2(\kappa-2)^2\Leftrightarrow$

$\kappa-1=2\kappa^2-8\kappa+8\Leftrightarrow 2\kappa^2-9\kappa+9=0$.

Έχουμε $\Delta=9^2-4\cdot2\cdot9=9$, οπότε $\kappa=3$ ή $\kappa=\frac{3}{2}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1. Η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη με την :

$\lambda^2-\lambda^2x-\lambda y+\frac{1+x}{4}=0\Leftrightarrow 4\lambda^2-4\lambda^2x-4\lambda y+1+x=0\Leftrightarrow\left(1-4\lambda^2\right)x-4\lambda y+1+4\lambda^2=0$ (2)

Έστω ότι η (2) δεν παριστάνει ευθεία. Τότε $1-4\lambda^2=0$ και $-4\lambda=0$ δηλ.

$\lambda=\pm\frac{1}{2}$ και $\lambda=0$ που είναι αδύνατο. Άρα η (2) για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, παριστάνει ευθεία.

Γ.2 **<u>1</u>**

1^{ος} τρόπος :

Στην (2) θέτουμε διαδοχικά: $\lambda=\frac{1}{2}$ και $\lambda=0$ οπότε έχουμε :

$-2y+2=0$ και $x+1=0\Leftrightarrow y=1$ και $x=-1$. Στην (2) θέτουμε $x=-1$ και $y=1$ οπότε έχουμε : $-1+4\lambda^2-4\lambda+1+4\lambda^2=0\Leftrightarrow 8\lambda^2-4\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=0$ ή $\lambda=\frac{1}{2}$.

Η (2) λοιπόν δεν ισχύει για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, οπότε δεν υπάρχει σημείο από το οποίο να διέρχονται όλες οι ευθείες της μορφής (2)

2^{ος} τρόπος :

Έστω ότι όλες οι ευθείες της μορφής (1) διέρχονται από το σημείο $M(x_0,y_0)$.

Η εξίσωση (1) γίνεται : $\lambda^2(1-x_0)-\lambda y_0+\frac{1+x_0}{2}=0$ (3).

Η εξίσωση (3) πρέπει να ισχύει για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, οπότε $1-x_0=0\Leftrightarrow x_0=1$, $y_0=0$

και $\frac{1+x_0}{4}=0\Leftrightarrow x_0=-1$ που είναι αδύνατο.

Έτσι, δεν υπάρχει σημείο από το οποίο να διέρχονται όλες οι ευθείες της μορφής (1).

Γ.3. Η (2) για $\lambda = 1$ γίνεται: $(\varepsilon_1): -3x - 4y + 5 = 0$ και για $\lambda = -1$ γίνεται $(\varepsilon_2): -3x + 4y + 5 = 0$.

Τα σημεία τομής των $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ με τον $y'y$, δηλαδή με την ευθεία $(\varepsilon): x = 0$ είναι αντίστοιχα: $\mathrm{A}\left(0,\frac{5}{4}\right)$ και $\mathrm{B}\left(0,-\frac{5}{4}\right)$.

Το σημείο τομής Γ των $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ προκύπτει από την λύση του συστήματος: $(\Sigma)\begin{cases}-3x-4y+5=0\\-3x+4y+5=0\end{cases}$.

Με πρόσθεση και αφαίρεση κατά μέλη έχουμε : $-6x+10=0 \Leftrightarrow x=\frac{5}{3}$ και $-8\mathrm{y}=0 \Leftrightarrow \mathrm{y}=0$ οπότε $\Gamma\left(\frac{5}{3},0\right)$.

Έχουμε $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(0,-\frac{5}{2}\right)$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=\left(\frac{5}{3},\frac{-5}{4}\right)$.

Οπότε $(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}0 & -\frac{5}{2}\\ \frac{5}{3} & -\frac{5}{4}\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{6}=\frac{25}{12}\,\tau.\mu.$.

Γ.4. Από το $\mathrm{O}(0,0)$ φέρνουμε ευθεία (δ) κάθετη στην (ε_1).

Είναι $\lambda(\varepsilon_1)=-\frac{3}{4}$ άρα $\lambda(\delta)=\frac{4}{3}$.

Η εξίσωση της (δ) είναι : $y=\frac{4}{3}x \Leftrightarrow 4x-3y=0$.

Το σημείο τομής Δ των (δ) και (ε_1) είναι το ζητούμενο σημείο, το οποίο προκύπτει από τη λύση του συστήματος $(\Sigma)\begin{cases}4x-3y=0\\-3x-4y=-5\end{cases}$

Είναι $D=\begin{vmatrix}4 & -3\\-3 & -4\end{vmatrix}=-16-9=-25$, $D_x=\begin{vmatrix}0 & -3\\-5 & -4\end{vmatrix}=-15$ και $D_y=\begin{vmatrix}4 & 0\\-3 & -5\end{vmatrix}=-20$

Άρα $x=\frac{-15}{-25}=\frac{3}{5}$ και $y=\frac{-20}{-25}=\frac{4}{5}$, οπότε $\Delta\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1. Η (1) είναι ισοδύναμη με την $x^2+y^2+(\lambda-2)x+(\lambda+2)y+\frac{\lambda^2}{2}=0$ (2).

Είναι $A=\lambda-2$, $B=\lambda+2$ και $\Gamma=\frac{\lambda^2}{2}$, οπότε

$A^2+B^2-4\Gamma=(\lambda-2)^2+(\lambda+2)^2-4\frac{\lambda^2}{2}=8>0$.

Έτσι , η (2) παριστάνει ίσους κύκλους με ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{8}}{2}=\sqrt{2}$.

Δ.2. Τα κέντρα των παραπάνω κύκλων είναι: $K\left(\frac{2-\lambda}{2},\frac{-2-\lambda}{2}\right)$, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

Έστω $x=\frac{2-\lambda}{2}$ και $y=\frac{-2-\lambda}{2}$ και με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε: $x-y=2$.
Δηλ. τα κέντρα των κύκλων κινούνται στην ευθεία $(\varepsilon): x-y-2=0$.
(Ένας άλλος τρόπος λύσης θα ήταν με απαλοιφή του λ από τις συντεταγμένες του Κ).

Δ.3. Επειδή οι κύκλοι είναι ίσοι, τότε η (ε) είναι η μεσοπαράλληλος των $(\delta_1),(\delta_2)$ με $d(\varepsilon,\delta_1)=d(\varepsilon,\delta_2)=\sqrt{2}$.
Οι ευθείες $(\delta_1),(\delta_2)$ αφού είναι παράλληλες της (ε) είναι μορφής: $(\delta): x-y+\gamma=0$.
Έστω $B(2,0)$ ένα σημείο της (ε) τότε :

$$d(\varepsilon,\delta)=\sqrt{2}\Leftrightarrow d(B,\delta)=\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{|2+\gamma|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\Leftrightarrow|2+\gamma|=2\Leftrightarrow 2+\gamma=2 \quad ή \quad 2+\gamma=-2$$

άρα $\gamma=0$ ή $\gamma=-4$.
Οπότε $(\delta_1): x-y=0$ και $(\delta_2): x-y-4=0$.

Δ.4. **i.** Επειδή η (ε) δεν είναι κατακόρυφη και εφάπτεται της παραβολής, πρέπει το σύστημα των εξισώσεων $: x^2=2py$ και $x-y-2=0$ να έχει μοναδική λύση. Έτσι, έχουμε : $x^2=2p(x-2)\Leftrightarrow x^2-2px+4p=0$.
Πρέπει λοιπόν η διακρίνουσα της παραπάνω εξίσωσης, να είναι ίση με μηδέν.
Δηλαδή $4p^2-16p=0\Leftrightarrow p=4$ γιατί $p\neq 0$.
Έτσι $(C): x^2=8y$ με εστία $E\left(0,\frac{p}{2}\right)$ δηλαδή $E(0,2)$ και διευθετούσα

$(\delta): y=-2$

ii. Έστω $A(x_1, y_1) \in (C)$ τότε $x_1^2 = 8y_1$ (3). Η εφαπτομένη της (C) στο Α είναι :
$(\eta): xx_1 = 4y + 4y_1 \Leftrightarrow x \cdot x_1 - 4y - 4y_1 = 0$.
Επειδή $(\eta) \perp (\varepsilon)$ και $\lambda_\eta = \frac{x_1}{4}, \lambda_\varepsilon = 1$, τότε $\frac{x_1}{4} = -1 \Leftrightarrow x_1 = -4$.
Από την (3) έχουμε: $16 = 8y_1 \Leftrightarrow y_1 = 2$.
Έτσι, η εξίσωση της (η) είναι: $-4x - 4y - 8 = 0 \Leftrightarrow x + y + 2 = 0$.