



## Β' ΤΑΞΗ ΓΕΝ. ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

### ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

#### ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

##### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

- A.** Σελίδα 43 Σχολικού Βιβλίου.  
**B.** Σελίδα 89 Σχολικού Βιβλίου.  
**Γ.** α) Λάθος  
 β) Σωστό  
 γ) Σωστό  
 δ) Λάθος  
 ε) Λάθος

##### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

- α.** Τα διανύσματα  $\vec{AB}$ ,  $\vec{B\Gamma}$  έχουν συντεταγμένες:  
 $\vec{AB} = (-1+5, -2-3) = (4, -5)$  και  $\vec{B\Gamma} = (4+1, 2+2) = (5, 4)$ .  
 Το εσωτερικό τους γινόμενο είναι  $\vec{AB} \cdot \vec{B\Gamma} = 4 \cdot 5 + (-5) \cdot 4 = 20 - 20 = 0$ ,  
 επομένως τα διανύσματα  $\vec{AB}$ ,  $\vec{B\Gamma}$  είναι κάθετα.

- β.** Πρώτος τρόπος  
 Το διάνυσμα  $\vec{A\Gamma}$  έχει συντεταγμένες  $\vec{A\Gamma} = (4+5, 2-3) = (9, -1)$ .  
 Η ορίζουσα των διανυσμάτων  $\vec{AB}$ ,  $\vec{A\Gamma}$  είναι:

$$\det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma}) = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} = 4(-1) - 9(-5) = -4 + 45 = 41$$

Το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι:

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma})| = \frac{1}{2} |41| = \frac{41}{2} \text{ τ.μ.}$$

Δεύτερος τρόπος :

Αφού  $\vec{AB} \perp \vec{B\Gamma}$ , το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο στην κορυφή  $B$ , άρα το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι:

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\vec{AB}| |\vec{B\Gamma}| = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + (-5)^2} \sqrt{5^2 + 4^2} = \frac{1}{2} \sqrt{41} \sqrt{41} = \frac{41}{2} \text{ τ.μ.}$$

- γ.** Πρώτος τρόπος :

Τα μέτρα των διανυσμάτων  $\vec{AB}$ ,  $\vec{A\Gamma}$  είναι αντίστοιχα:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{4^2 + (-5)^2} = \sqrt{41} \text{ και } |\vec{A\Gamma}| = \sqrt{9^2 + (-1)^2} = \sqrt{82} = \sqrt{2} \sqrt{41}$$

Το συνημίτονο της γωνίας  $\varphi$  είναι:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{A\Gamma}}{|\vec{AB}| |\vec{A\Gamma}|} = \frac{4 \cdot 9 + (-5) \cdot (-1)}{\sqrt{2} \sqrt{41} \sqrt{41}} = \frac{41}{41\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Επομένως,  $\varphi = 45^\circ$ , επειδή  $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ .

Δεύτερος τρόπος:

$\vec{AB} \perp \vec{BG}$  και  $|\vec{AB}| = |\vec{BG}| = \sqrt{41}$ , άρα το τρίγωνο  $ABG$  είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε συμπεραίνουμε ότι  $\varphi = 45^\circ$ .

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

- α.** Η (1) ισοδυναμεί με την εξίσωση:  $(1 + \kappa)x + (1 - \kappa)y + (1 - 5\kappa) = 0$ .  
Οι συντελεστές των  $x, y$  δεν μηδενίζονται για την ίδια τιμή του  $\kappa$ .  
Πράγματι, ο συντελεστής του  $x$  μηδενίζεται για  $\kappa = -1$ , ενώ ο συντελεστής του  $y$  μηδενίζεται για  $\kappa = 1$ .  
Άρα η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε  $\kappa \in \mathbb{R}$ .
- β.** Θέτουμε στην (1),  $x = 2$  και  $y = -3$ , οπότε προκύπτει:  
 $0 + \kappa \cdot 0 = 0$ , που ισχύει για κάθε  $\kappa \in \mathbb{R}$ .  
Άρα όλες οι ευθείες που παριστάνει η (1), διέρχονται από το  $A(2, -3)$ .
- γ.**  $(1 + \kappa)x + (1 - \kappa)y + (1 - 5\kappa) = 0$ .  
Η εξίσωση παριστάνει ευθεία παράλληλη στον  $x'x$ , αν  $\begin{cases} 1 + \kappa \neq 0 \\ 1 - \kappa = 0 \end{cases}$ , άρα,  $\kappa = 1$ .  
Η (1) για  $\kappa = 1$ , γίνεται:  $2x - 4 = 0$  ή  $x = 2$ .
- δ.**  $K$  είναι η προβολή του  $A$  στον  $x'x$ , άρα  $x_0 = 2$ . Έχουμε  $K(2, 0)$ , άρα  $E(-2, 0)$  Ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η παραβολή  $C$ , με εστία  $E(-2, 0)$  και διευθετούσα την ευθεία  $\varepsilon: x = 2$ .  
 $\left(\frac{p}{2} = -2 \Leftrightarrow p = -4\right)$ , άρα η παραβολή έχει εξίσωση  $C: y^2 = -8x$   
Η εξίσωση της παραβολής, δεν είναι απαραίτητο, να βρεθεί.)

### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

- α.** Στην εξίσωση  $x^2 + y^2 - (\lambda + 4)x + \lambda y + 2\lambda = 0$  έχουμε:  
 $A = -(\lambda + 4)$ ,  $B = \lambda$ ,  $\Gamma = 2\lambda$ , οπότε:  
 $A^2 + B^2 - 4\Gamma = (\lambda + 4)^2 + \lambda^2 - 8\lambda = 2(\lambda^2 + 8) > 0$ , για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$  και επομένως η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε τιμή της παραμέτρου  $\lambda$ . Για το κέντρο  $K$  και την ακτίνα  $R$  του κύκλου ισχύουν:  
 $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$  και  $R = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$ , επομένως  $K\left(\frac{\lambda + 4}{2}, -\frac{\lambda}{2}\right)$  και  
 $R = \frac{\sqrt{2(\lambda^2 + 8)}}{2}$ .
- β.** Έστω  $K(x, y)$  το κέντρο του κύκλου (1), τότε (από α ερώτημα):  
 $x = \frac{\lambda + 4}{2}$  και  $y = -\frac{\lambda}{2}$

Έχουμε λοιπόν το σύστημα 
$$\begin{cases} x = \frac{\lambda + 4}{2} \\ y = -\frac{\lambda}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \lambda + 4 \\ 2y = -\lambda \end{cases}$$

Απαλείφουμε το  $\lambda$  από τις εξισώσεις και βρίσκουμε  $2x + 2y - 4 = 0$  ή ισοδύναμα  $x + y - 2 = 0$ .

Άρα το κέντρο  $K$  του κύκλου (1) κινείται στην ευθεία  $x + y - 2 = 0$ .

γ. Έχουμε  $2\alpha = 8 \Leftrightarrow \alpha = 4$  και  $\gamma = 2\sqrt{3}$ . Ισχύει  $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$ , οπότε 
$$\beta^2 = 4^2 - (2\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow \beta^2 = 16 - 12 \Leftrightarrow \beta^2 = 4.$$

Επομένως η εξίσωση της έλλειψης  $C$  είναι:  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ , εφόσον οι εστίες της  $E', E$  βρίσκονται στον άξονα  $y'y$ .

δ. Η εξίσωση (1) της υπόθεσης για  $\lambda = 0$  γίνεται  $x^2 + y^2 - 4x = 0$  που είναι η εξίσωση του κύκλου  $C_1$  με κέντρο το σημείο  $K_1(2, 0)$  και ακτίνα  $\rho_1 = 2$ .

Η εξίσωση της εφαπτομένης  $\varepsilon$  της έλλειψης  $C$  στο σημείο της  $M_1(x_1, y_1)$  είναι:

$$\frac{x x_1}{4} + \frac{y y_1}{16} = 1 \text{ ή ισοδύναμα } 4x x_1 + y y_1 - 16 = 0.$$

Η  $\varepsilon$  εφάπτεται και του κύκλου  $C_1$ , άρα ισχύει:  $d(K_1, \varepsilon) = \rho_1$ , (2).

i. Από την σχέση (2) έχουμε ισοδύναμα 
$$\frac{|4 \cdot 2 \cdot x_1 + 0 \cdot y_1 - 16|}{\sqrt{(4x_1)^2 + y_1^2}} = 2 \Leftrightarrow$$

$$8|x_1 - 2| = 2\sqrt{16x_1^2 + y_1^2} \Leftrightarrow 16(x_1 - 2)^2 = 16x_1^2 + y_1^2 \Leftrightarrow$$

$$16x_1^2 - 64x_1 + 64 = 16x_1^2 + y_1^2 \Leftrightarrow y_1^2 = 64(1 - x_1).$$

ii. Το σημείο  $M_1(x_1, y_1)$  ανήκει στην έλλειψη  $C$ :  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ , άρα,

$$\frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{16} = 1 \Leftrightarrow 4x_1^2 + y_1^2 = 16 \Leftrightarrow y_1^2 = 16 - 4x_1^2 \quad (3).$$

Έτσι η σχέση  $y_1^2 = 64(1 - x_1)$  λόγω της (3), γράφεται:

$$16 - 4x_1^2 = 64(1 - x_1) \Leftrightarrow 4x_1^2 - 64x_1 + 48 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 - 16x_1 + 12 = 0 \quad (4)$$

Τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (x_1, 4)$  και  $\vec{\beta} = (x_1, 3 - 4x_1)$  είναι μεταξύ τους κάθετα, όταν:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \text{ ή ισοδύναμα } x_1 \cdot x_1 + 4 \cdot (3 - 4x_1) = 0 \Leftrightarrow x_1^2 - 16x_1 + 12 = 0,$$

που ισχύει λόγω της (4).