



## Β' ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

### ΑΛΓΕΒΡΑ

#### ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

#### ΘΕΜΑ Α

**A.1.** Έστω η πολυωνμική εξίσωση  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ , με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος  $\rho \neq 0$  είναι ρίζα της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι ο  $\rho$  είναι διαιρέτης του σταθερού όρου  $a_0$ .

**(8 Μόρια)**

**A.2.** Αν  $\alpha > 0$  με  $\alpha \neq 1$  τότε για οποιουσδήποτε  $\theta_1, \theta_2 > 0$  να γράψετε τα αναπτύγματα των τύπων  $\log_\alpha \left( \frac{\theta_1}{\theta_2} \right)$  και  $\log_\alpha (\theta_1 \theta_2)$  χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των λογαρίθμων.

**(2 Μόρια)**

**A.3.** Τι γνωρίζετε για την μονοτονία της συνάρτησης  $f(x) = a^x$ ,  $0 < a \neq 1$ .

**(3 Μόρια)**

**A.4.** Να γράψετε στο τετράδιό σας για κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση .

**α.** Η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1453}{2011} \eta\mu(2x)$  έχει περίοδο :

**A:**  $T = \pi + \frac{\pi}{4}$       **B:**  $T = \pi$       **Γ:**  $T = -2\pi$

**Δ:**  $T = \frac{\pi}{2}$       **Ε:**  $T = \frac{1453}{2011}$

**(2 Μόρια)**

**β.** Το άθροισμα των συντελεστών του πολυώνυμου

$P(x) = (x^4 - 3x^2 + 2x)^{15} - x^5 + 4x$  είναι :

**A:**  $2^{15} + 4$

**B:** 1

**Γ:** 3

**Δ:** 5

**Ε.** κανένα από τα προηγούμενα.

**(2 Μόρια)**

- γ. Αν  $S_n$  συμβολίζει το άθροισμα των πρώτων  $n$  όρων μιας γεωμετρικής προόδου ( $a_n$ ) με λόγο  $\lambda \neq 1$  και πρώτο όρο  $a_1$ , τότε είναι :

$$\text{A: } S_n = a_1 \frac{\lambda - 1}{\lambda^n - 1} \quad \text{B: } S_n = a_1 \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \quad \text{Γ: } S_n = \frac{a_1 \lambda^n - 1}{\lambda - 1}$$

$$\text{Δ: } S_n = a_1 \frac{1 - \lambda^n}{\lambda - 1} \quad \text{E: κανένα από τα προηγούμενα}$$

(2 Μόρια)

- A.5.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α. Κάθε σταθερό μη μηδενικό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.

(2 Μόρια)

- β. Η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \varepsilon \varphi x$  είναι περιοδική με περίοδο  $T = \frac{2}{\pi}$ .

(2 Μόρια)

- γ. Η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = a^x \beta^x$  όπου  $a > 0$ ,  $\beta > 0$  με  $a \neq 1$ ,  $\beta \neq 1$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , όταν  $a < \frac{1}{\beta}$ .

(2 Μόρια)

## ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = a \cdot \sin\left(\frac{\beta x}{2}\right) (1)$ , όπου  $\beta < 0$  και  $a \in \mathbb{R}$ . Αν γνωρίζετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  διέρχεται από τα σημεία  $A(0, \beta + 5)$ , και  $B\left(\frac{4\pi}{\beta}, 4\beta^2\right)$  τότε:

- B.1.** Να αποδείξετε ότι  $a = 4$  και  $\beta = -1$ .

(7 Μόρια)

- B.2.** Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  με την ευθεία  $y=4$  στο διάστημα  $[0, 12\pi]$ .

(7 Μόρια)

- B.3.** Να βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $f$  καθώς και την περίοδο της.

(6 Μόρια)

**B.4.** Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων  $A = f(4\pi) - f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$  και

$$B = 3f(0) \frac{f(0)^{2010} - 1}{f(0) - 1} + 4$$

(5 Μόρια)

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται πολυώνυμο  $P(x) = x^4 + ax^3 - 7x^2 + bx + 2$ , όπου  $a$  και  $b$  είναι πραγματικοί αριθμοί. Αν η διαίρεση του  $P(x)$  δια  $x - 1$  δίνει υπόλοιπο 1 και η αριθμητική τιμή του για  $x = -2$  είναι 10, τότε:

**Γ.1.** Να βρείτε τις τιμές των  $a, b \in \mathbb{R}$ .

(7 Μόρια)

**Γ.2.** Για τις τιμές  $a = -5$  και  $b = 10$ ,

**α.** Να βρείτε το πηλίκο  $\Pi(x)$  της διαίρεσης του  $P(x)$  δια του  $Q(x) = x^3 + x^2 - 2x$  και να γράψετε το  $P(x)$  με την βοήθεια της ταυτότητας ευκλείδειας διαίρεσης.

(6 Μόρια)

**β.** Να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = u(x)$ , όπου  $u(x)$  το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $P(x)$  δια  $Q(x)$ .

(7 Μόρια)

**γ.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης  $Q(x)$  βρίσκεται πάνω από τον άξονα  $x'x$ .

(5 Μόρια)

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln\left(\frac{4-x}{4+x}\right)$ .

**Δ.1.** Να ορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$  και να αποδείξετε ότι γραφική της παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

(5 Μόρια)

**Δ.2.** Να υπολογίσετε η τιμή της παράστασης

$$A = f(-3) + f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$$

(6 Μόρια)

**Δ.3.** Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) - f(-x) < -2 \ln 3$ .

(7 Μόρια)

**Δ.4.** Να λύσετε την εξίσωση  $e^{2f(x)} + 3 = 4e^{f(x)}$ .

(7 Μόρια)