



Α' ΤΑΞΗ ΓΕΝ. ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

- Α. Βλέπε απόδειξη σχολικού βιβλίου σελ.38
 Β. Βλέπε ορισμό σχολικού βιβλίου σελ. 71
 Γ. α. Σ
 β. Σ
 γ. Λ
 δ. Λ
 ε. Σ

ΘΕΜΑ 2^ο

- α. Επειδή οι ευθείες είναι παράλληλες ισχύει $a_1 = a_2$ δηλαδή
 $\lambda - 2 = \frac{2 - \lambda}{4} \Leftrightarrow 4(\lambda - 2) = 2 - \lambda \Leftrightarrow 4\lambda - 8 = 2 - \lambda \Leftrightarrow 5\lambda = 10 \Leftrightarrow \lambda = 2$
- β. Επειδή οι ευθείες είναι κάθετες ισχύει $a_1 a_2 = -1$ δηλαδή
 $(\lambda - 2) \cdot \frac{(2 - \lambda)}{4} = -1 \Leftrightarrow -(\lambda - 2)^2 = -4 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 = 4 \Leftrightarrow |\lambda - 2| = 2$
 $\Leftrightarrow (\lambda - 2 = 2 \text{ ή } \lambda - 2 = -2) \Leftrightarrow (\lambda = 4 \text{ ή } \lambda = 0)$

ΘΕΜΑ 3^ο

- α. $\alpha = \frac{(\sqrt{2}+1)^2 + (\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1) \cdot (\sqrt{2}-1)} = \frac{2+2\sqrt{2}+1+2-2\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2})^2 - 1^2} = \frac{6}{2-1} = 6$
- β. Για $\alpha = 6$ η συνάρτηση γίνεται: $f(x) = x^4 - 6x^2 + 2$, οπότε
 $f(1) = 1^4 - 6 \cdot 1^2 + 2 = 1 - 6 + 2 = -3$.
- γ. Έχουμε $f(x) = f(1) \Leftrightarrow x^4 - 6x^2 + 2 = -3 \Leftrightarrow x^4 - 6x^2 + 5 = 0$ θέτουμε $x^2 = \omega$, όπου $\omega > 0$, οπότε η εξίσωση γίνεται $\omega^2 - 6\omega + 5 = 0$.
 $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16$, άρα $\omega_1 = \frac{6+4}{2} = 5$ και $\omega_2 = \frac{6-4}{2} = 1$ οι οποίες είναι δεκτές. Έτσι $x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$ ή $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$
- δ. Έχουμε $f(x) - f(1) \leq 0 \Leftrightarrow x^4 - 6x^2 + 5 \leq 0 \Leftrightarrow \omega^2 - 6\omega + 5 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq \omega \leq 5$ οπότε έχουμε τις δύο ανισώσεις $x^2 \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -1$ ή $x \geq 1$ και $x^2 \leq 5 \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$.

Οι οποίες συναληθεύουν για του πραγματικούς που ανήκουν στο διάστημα $[-\sqrt{5}, -1] \cup [1, \sqrt{5}]$

ΘΕΜΑ 4^ο

A. α. Επειδή η εξίσωση (1) θέλουμε να είναι δευτέρου βαθμού ως προς ω , πρέπει να ισχύει $D \neq 0$. Άρα το γραμμικό σύστημα (Σ) έχει μοναδική λύση.

β. i. Από τους τύπους «Vieta» έχουμε:

$$S = -\frac{\beta}{\alpha} = -1 \Leftrightarrow \frac{D_x - D_y}{D} = -1$$

$$P = \frac{\gamma}{\alpha} = -2 \Leftrightarrow \frac{2D_x + D_y}{D} = -2$$

ii. από το β (i) ερώτημα έχουμε

$$\begin{cases} D_x - D_y = -D & D \neq 0 \\ 2D_x + D_y = -2D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{D_x}{D} - \frac{D_y}{D} = -1 \\ 2\frac{D_x}{D} + \frac{D_y}{D} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -1 \\ 2x + y = -2 \end{cases}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη οπότε έχουμε $3x = -3 \Leftrightarrow x = -1$.

Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση προκύπτει:

$$-1 - y = -1 \Leftrightarrow y = 0$$

Τελικά η μοναδική λύση του (Σ) είναι το ζεύγος $(-1, 0)$.

B. Αν $D = 0$, τότε η εξίσωση (1) γίνεται:

$$-(D_x - D_y)\omega + 2D_x + D_y = 0 \Leftrightarrow (D_x - D_y)\omega = 2D_x + D_y.$$

Η εξίσωση είναι αδύνατη, άρα πρέπει να ισχύει:

$$\begin{cases} D_x - D_y = 0 \\ 2D_x + D_y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D_x = D_y \\ 2D_x + D_x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D_x = D_y \\ 3D_x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D_x = D_y \\ D_x \neq 0 \end{cases}.$$

Άρα το σύστημα (Σ) είναι αδύνατο.