

**ΤΑΞΗ:** Α' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

**ΜΑΘΗΜΑ:** ΆΛΓΕΒΡΑ

**Ημερομηνία:** Κυριακή 1 Απριλίου 2012

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A.1.** Σχολικό Βιβλίο σελίδα 34.

**A.2.** Σχολικό Βιβλίο σελίδα 125.

- A.3.**
- α. ΣΩΣΤΟ
  - β. ΛΑΘΟΣ
  - γ. ΛΑΘΟΣ
  - δ. ΣΩΣΤΟ
  - ε. ΣΩΣΤΟ

**ΘΕΜΑ Β**

**B.1.** Για να ορίζεται η συνάρτηση  $f$  πρέπει

- $(x+1)^4 \geq 0$ , το οποίο ισχύει για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

και

- $(x-2)^4 \geq 0$  το οποίο ισχύει για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

και

- $x+1 \neq 0$  και  $x-2 \neq 0$ , δηλαδή  $x \neq -1$  και  $x \neq 2$

Άρα το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το  $A = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$

**B.2.** για κάθε  $x \in A = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$  ο τύπος της  $f$  γίνεται

$$f(x) = \frac{\sqrt{(x+1)^4}}{x+1} - \frac{\sqrt{(x-2)^4}}{x-2} = \frac{\sqrt{[(x+1)^2]^2}}{x+1} - \frac{\sqrt{[(x-2)^2]^2}}{x-2} =$$

$$= \frac{|(x+1)^2|}{x+1} - \frac{|(x-2)^2|}{x-2} = \frac{|(x+1)^2|}{x+1} - \frac{|(x-2)^2|}{x-2} = x+1 - (x-2) = x+1-x+2=3$$

Άρα για κάθε  $x \in A = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$  ισχύει ότι:  $f(x) = 3$ .

Έτσι  $f(2012) = 3$ .

**B.3.** Έτσι η ανίσωση  $|18-3x| \leq f(2012)$  γίνεται:

$$\begin{aligned} |18-3x| \leq f(2012) &\Leftrightarrow |3(6-x)| \leq 3 \Leftrightarrow 3|(6-x)| \leq 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |6-x| \leq 1 \Leftrightarrow |x-6| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x-6 \leq 1 \Leftrightarrow -1+6 \leq x \leq 1+6 \\ &\text{Οπότε } x \in [5, 7]. \end{aligned}$$

### ΘΕΜΑ Γ

**Γ.1.1.** Η εξίσωση γίνεται:

$$x + 1 = \lambda^2 - |\lambda| \cdot x \Leftrightarrow |\lambda| \cdot x + x = \lambda^2 - 1$$

$$\text{ή } (|\lambda| + 1) \cdot x = |\lambda|^2 - 1$$

ο συντελεστής του αγνώστου  $x$  είναι ο  $\alpha = |\lambda| + 1$  και ο σταθερός όρος της εξίσωσης ο  $\beta = |\lambda|^2 - 1 = (|\lambda| - 1)(|\lambda| + 1)$ .

Ομως για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$  ισχύει ότι  $|\lambda| \geq 0 \Leftrightarrow |\lambda| + 1 \geq 1 > 0$ .

Άρα για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$  ο  $\alpha = |\lambda| + 1 \neq 0$ , έτσι η εξίσωση έχει για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ , μοναδική λύση ως προς  $x$ , την

$$(|\lambda| + 1) \cdot x = |\lambda|^2 - 1 \Leftrightarrow \frac{(|\lambda| + 1) \cdot x}{(|\lambda| + 1)} = \frac{(|\lambda| - 1)(|\lambda| + 1)}{(|\lambda| + 1)} \Leftrightarrow x = |\lambda| - 1$$

άρα η λύση της εξίσωσης:  $x = |\lambda| - 1$ , για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Γ.1.2.** Για να απέχει η λύση αυτή από τον αριθμό 3, απόσταση που δεν ξεπερνά το 2, άρα:

$$\begin{aligned} d(x, 3) \leq 2 &\Leftrightarrow |x-3| \leq 2 \Leftrightarrow ||\lambda| - 1 - 3| \leq 2 \Leftrightarrow ||\lambda| - 4| \leq 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -2 \leq |\lambda| - 4 \leq 2 \Leftrightarrow -2 + 4 \leq |\lambda| \leq 4 + 2 \Leftrightarrow 2 \leq |\lambda| \leq 6 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left. \begin{aligned} &|\lambda| \leq 6 \\ &\text{και} \\ &|\lambda| \geq 2 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} &-6 \leq \lambda \leq 6 \\ &\text{και} \\ &\text{ή } \lambda \leq -2 \text{ ή } \lambda \geq 2 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \lambda \in [-6, -2] \cup [2, 6] \end{aligned}$$

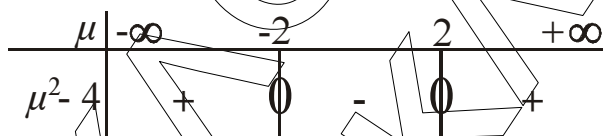
Γ2. έχουμε τις ευθείες

$$ε_1 : y = (\mu^2 - 4)x + \mu + 1, \quad \mu \in \mathbb{R} \text{ και}$$

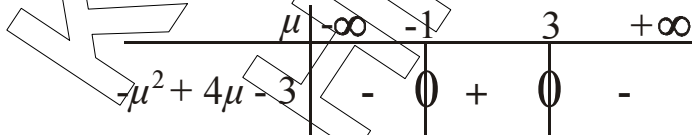
$$ε_2 : y = (-\mu^2 + 4\mu - 3)x + 2, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της  $ε_1$  είναι ο  $\alpha_1 = \epsilon\phi\omega_1 = \mu^2 - 4$ , όπου  $\omega_1$  είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία  $ε_1$  με τον άξονα  $x'x$ , ενώ ο συντελεστής διεύθυνσης της  $ε_2$  είναι  $\alpha_2 = \epsilon\phi\omega_2 = -\mu^2 + 4\mu - 3$  όπου  $\omega_2$  είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία  $ε_2$  με τον άξονα  $x'x$ .

Για να σχηματίζει η ευθεία  $ε_1$  αμβλεία γωνία με τον άξονα  $x'x$  δηλαδή:  $90^\circ < \omega_1 < 180^\circ$  πρέπει ο συντελεστής διεύθυνσης της  $ε_1$  να είναι αρνητικός δηλαδή  $\alpha_1 = \epsilon\phi\omega_1 < 0$ , άρα  $\alpha_1 < 0 \Leftrightarrow \mu^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow \mu \in (-2, 2)$



Για να σχηματίζει η ευθεία  $ε_2$  οξεία γωνία με τον άξονα  $x'x$  δηλαδή:  $0^\circ < \omega_2 < 90^\circ$ , πρέπει ο συντελεστής διεύθυνσης της  $ε_2$  να είναι θετικός δηλαδή  $\alpha_2 = \epsilon\phi\omega_2 > 0$ , άρα  $\alpha_2 > 0 \Leftrightarrow -\mu^2 + 4\mu - 3 > 0 \Leftrightarrow \mu \in (1, 3)$



Έτσι για να σχηματίζουν η  $ε_1$  αμβλεία γωνία με τον  $x'x$  και η  $ε_2$  οξεία γωνία με τον άξονα  $x'x$  θα πρέπει να βρούμε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 < 0 \\ \text{και} \\ \alpha_2 > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \mu \in (-2, 2) \\ \text{και} \\ \mu \in (1, 3) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \mu \in (1, 2)$$

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ.1.** Αφού η ακολουθία  $(\alpha_n), n \in \mathbb{N}^*$  είναι αριθμητική πρόοδος θα ισχύει ότι:

$$\alpha_n = \alpha_1 + (n - 1)\omega, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^*, \text{ άρα για } n = 7 \text{ θα έχουμε:}$$

$$\alpha_7 = \alpha_1 + (7 - 1)\omega = \alpha_1 + 6\omega \text{ δίνεται όμως ότι } \alpha_7 = -11, \text{ άρα}$$

$$\alpha_1 + 6\omega = -11 \Leftrightarrow \alpha_1 + 6 \cdot (-2) = -11 \text{ έτσι } \alpha_1 = 12 - 11 = 1, \text{ οπότε ο}$$

$$\alpha_4 = \alpha_1 + 3\omega = 1 + 3(-2) = -5, \text{ οπότε η συνάρτηση } f(x) = \alpha_1 x^2 + \alpha_4 x + \alpha_1, \text{ ,}$$

λαμβάνει τη μορφή  $f(x) = x^2 - 5x + 1$ .

**Δ.2.** Και η αντίστοιχη εξίσωση  $f(x) = 0$  γίνεται  $x^2 - 5x + 1 = 0$  έτσι για τις ρίζες  $x_1, x_2$  της  $x^2 - 5x + 1 = 0$  θα έχουμε από τους τύπους Vieta:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-5}{1} = 5 \text{ και}$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = 1.$$

Τότε:

$$A = x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 = x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 5$$

$$B = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2}{x_1 x_2} + \frac{x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2}$$

$$B = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} = \frac{5^2 - 1}{1} = 23$$

$$\Gamma = \sqrt[3]{\sqrt{400(x_1 + x_2) - 2012x_1 x_2} + 12} = \sqrt[3]{\sqrt{400 \cdot 4 - 2012 \cdot 1} + 12}$$

$$\Gamma = \sqrt[3]{\sqrt{2000 - 2012} + 12} = 0$$

**Δ.3.** Η εξίσωση:  $|x^2 - B - 2| + |x - A| = \Gamma$  με βάση τα παραπάνω θα έχουμε :

$$|x^2 - 23 - 2| + |x - 5| = 0 \Leftrightarrow |x^2 - 25| + |x - 5| = 0$$

$$\text{Όμως } |a| + |b| = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ και } b = 0.$$

Έτσι  $|x^2 - 25| + |x - 5| = 0 \Leftrightarrow x^2 - 25 = 0$  και  $x - 5 = 0$  και η κοινή λύση των δύο εξισώσεων είναι η  $x = 5$ .