ΤΑΞΗ: 3η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Πέμπτη 7 Ιανουαρίου 2016
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω η συνάρτηση $F(x)=f(x)+g(x)$. Έχουμε:

$$F(x+h)-F(x)=\left[f(x+h)+g(x+h)\right]-\left[f(x)+g(x)\right]=\left[f(x+h)-f(x)\right]+\left[g(x+h)-g(x)\right]$$

και για $h\neq 0$, $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}+\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$. Επομένως:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x).$$

Α2.

1. Λ
2. Σ
3. Λ
4. Σ
5. Λ

Α3.

1. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$
2. $(\text{εφ}x)'=\dfrac{1}{\text{συν}^2 x}$
3. $(c\cdot f(x))'=c\cdot f'(x)$
4. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$f'(x)=\left(x^3\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)'-\left(\frac{x+1}{x^2}\right)'=\left(x^3\right)'\cdot\sigma\upsilon\nu x+x^3\cdot\left(\sigma\upsilon\nu x\right)'-\left[\frac{(x+1)'\cdot x^2-(x+1)\cdot\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2}\right]=$$

$$=3x^2\cdot\sigma\upsilon\nu x-x^3\eta\mu x\cdot-\frac{1\cdot x^2-(x+1)\cdot 2x}{x^4}=3x^2\cdot\sigma\upsilon\nu x-x^3\eta\mu x-\frac{x+2}{x^3}$$

Β2. $$f'(x)=\left(\sqrt{x^2+3x}\right)'-\left[\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2\right)^{10}\right]'=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x^2+3x}}\cdot\left(x^2+3x\right)'-10\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2\right)^9\cdot\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2\right)'=$$

$$=\frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}}-10\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2\right)^9\cdot\left(x^2-x\right)$$

Β3. $$f'(x)=\left(\alpha x^3\right)'-\left(\frac{5}{2}x^2\right)'-(3x)'+(10)'=3\alpha x^2-5x-3$$

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'=\left(3\alpha x^2\right)'-(5x)'-(3)'=6\alpha x-5$$

Η γραφική παράσταση της f'' διέρχεται από το $A\left(\frac{1}{2},1\right)$.

Άρα $f''\left(\frac{1}{2}\right)=1\Leftrightarrow 6\alpha\cdot\frac{1}{2}-5=1\Leftrightarrow 3\alpha=1+5\Leftrightarrow 3\alpha=6\Leftrightarrow\alpha=2$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Θα πρέπει $x^2+9\geq 0\Leftrightarrow x^2\geq -9$ που ισχύει πάντα.
Επίσης, θα πρέπει $3x-12\neq 0\Leftrightarrow 3x\neq 12\Leftrightarrow x\neq 4$.
Άρα $A_f=(-\infty,4)\cup(4,+\infty)$

Γ2. $$\lim_{x\to 4}f(x)=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x^2+9}-5}{3x-12}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{x^2+9}-5\right)\left(\sqrt{x^2+9}+5\right)}{3(x-4)\left(\sqrt{x^2+9}+5\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{x^2+9}\right)^2-5^2}{3(x-4)\left(\sqrt{x^2+9}+5\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{x^2+9-25}{3(x-4)\left(\sqrt{x^2+9}+5\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{3(x-4)\left(\sqrt{x^2+9}+5\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{3(x-4)\left(\sqrt{x^2+9}+5\right)}=\frac{4+4}{3(5+5)}=\frac{8}{30}=\frac{4}{15}.$$

Γ3. Αφού η f είναι συνεχής στο $x=4$, θα ισχύει:

$\lim\limits_{x\to 4} f(x)=f(4)$ ***(1)***

(1)=> $\alpha^2-\frac{11}{15}=\frac{4}{15}\Leftrightarrow \alpha^2=\frac{4}{15}+\frac{11}{15}\Leftrightarrow \alpha^2=\frac{15}{15}\Leftrightarrow \alpha^2=1\Leftrightarrow \alpha=\pm 1$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω η συνάρτηση εσόδων $E(x)$, τότε: $E(x)=5x$ (σε ευρώ)

Δ2. Κέρδος = Έσοδα – Κόστος.

Άρα: $P(x)=E(x)-K(x)=5x-\left(x^2-5x+9\right)=5x-x^2+5x-9=-x^2+10x-9$ (σε ευρώ) .

Δ3. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{P(x)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{-x^2+10x-9}{x^2-1}=\frac{0}{0}$ (Απροσδιόριστη Μορφή)

$-x^2+10x-9=-(x-1)(x-9)$,αφού η εξίσωση $-x^2+10x-9=0$ έχει ρίζες τις $x_1=1$ και $x_2=9$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{P(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{-x^2+10x-9}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)(x-9)}{(x-1)(x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-(x-9)}{x+1}=\frac{-(1-9)}{1+1}=\frac{-(-8)}{2}=\frac{8}{2}=4$$

Δ4. $P'(x)=\left(-x^2+10x-9\right)'=-2x+10$

$P''(x)=\left(P'(x)\right)'=(-2x+10)'=-2$

$2P''(2)+P'(3)+P(4)=2\cdot(-2)-2\cdot 3+10+\left(-4^2+10\cdot 4-9\right)=$

$=-4-6+10-16+40-9=40-25=15$