

**ΤΑΞΗ:** Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ:** ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Πέμπτη 7 Ιανουαρίου 2016

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

- A1. Βλέπε απόδειξη σχολικού βιβλίου σελ. 217.
- A2. α) Βλέπε ορισμό σχολικού βιβλίου σελ. 241.  
β) Βλέπε ορισμό σχολικού βιβλίου σελ. 151.
- A3. α) → Λάθος. Το σωστό είναι  $f^{-1}(f(x)) = x, x \in A$ .  
β) → Λάθος. Το σωστό είναι  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$ .  
γ) → Σωστό.  
δ) → Λάθος. Το σωστό είναι: Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$  και η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής στο  $f(x_0)$  τότε η σύνθεση τους  $g \circ f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .  
ε) → Λάθος. Το σωστό είναι  $f'(x) = a^x \cdot \ln a$ .

**ΘΕΜΑ Β**

**B1.** Η συνάρτηση  $f(x) = -e^{3x} - x^3 + 1$  έχει πεδίο ορισμού το  $R$ .

Έστω  $x_1, x_2 \in R$  με  $x_1 < x_2$ .

- Τότε έχουμε διαδοχικά:

$$3x_1 < 3x_2 \text{ και } x_1^3 < x_2^3$$

$$e^{3x_1} < e^{3x_2} \text{ και } -x_1^3 > -x_2^3$$

$$-e^{3x_1} > -e^{3x_2} \text{ (1) και } -x_1^3 + 1 > -x_2^3 + 1 \text{ (2).}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$-e^{3x_1} - x_1^3 + 1 > -e^{3x_2} - x_2^3 + 1.$$

Επομένως  $f(x_1) > f(x_2)$ .

Άρα η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $R$ .

- Παρατηρούμε ότι  $f(0) = -e^0 - 0 + 1 = -1 + 1 = 0$ .

Άρα η  $f$  έχει τουλάχιστον μια ρίζα, το  $x_0 = 0$ .

Αυτή είναι και μοναδική, γιατί η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα.

- Έτσι για κάθε  $x > 0$  επειδή η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα ισχύει  $f(x) < f(0)$ , δηλαδή  $f(x) < 0$ .

Ενώ για κάθε  $x < 0$  ισχύει  $f(x) > f(0)$ , οπότε  $f(x) > 0$ .

Το πρόσημο της  $f$  φαίνεται και στον παρακάτω πίνακα:

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	$\circ$	$-$

**B2.** Επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $R$ , γιατί προέρχεται από πράξεις με συνεχείς συναρτήσεις, είναι και συνεχής στο  $x_0 = 0$ .

Οπότε ισχύει:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$ .

Για  $x \neq 0$  έχουμε:  $\frac{f(x)-1}{f(x)} = 1 - \frac{1}{f(x)}$ .

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016**  
Α' ΦΑΣΗ

**E\_3.Μλ3ΘΟ(α)**

$$\text{Για } x > 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ 1 - \frac{1}{f(x)} \right] = +\infty.$$

Όντως, στο Β1 ερώτημα αποδείξαμε, ότι για κάθε  $x > 0$  ισχύει  $f(x) < 0$ , οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)} = -\infty.$$

$$\text{Για } x < 0, \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[ 1 - \frac{1}{f(x)} \right] = -\infty.$$

Όντως, στο Β1 ερώτημα αποδείξαμε, ότι για κάθε  $x < 0$  ισχύει  $f(x) > 0$ , οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

Επομένως, δεν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{f(x)}$ .

**B3. α)** Επειδή η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $R$ , είναι και 1-1, επομένως αντιστρέφεται.

Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης, είναι το σύνολο τιμών της  $f$ .

Η  $f$  είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο  $R$ . Έτσι, το σύνολο τιμών της, είναι το  $f(R) = (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)) = (-\infty, +\infty) = R$ .

Ισχύουν:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^{3x} - x^3 + 1) = -\infty.$

-Ειδικά  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{3x} = \lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty.$

Θέσαμε  $u = 3x$ , οπότε αν  $x \rightarrow +\infty$  τότε  $u \rightarrow +\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3) = -\infty.$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^{3x} - x^3 + 1) = +\infty.$

-Ειδικά  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{3x} = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0.$

Θέσαμε  $u = 3x$  οπότε αν  $x \rightarrow -\infty$  τότε  $u \rightarrow -\infty$ ,

ενώ  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = +\infty.$

**β)** Ισχύουν ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} e^{-e^{3x} - x^3 - 2015} = 1 &\Leftrightarrow e^{-e^{3x} - x^3 - 2015} = e^0 \Leftrightarrow -e^{3x} - x^3 - 2015 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -e^{3x} - x^3 + 1 = 2016 \Leftrightarrow f(x) = 2016. \end{aligned}$$

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016**  
Α΄ ΦΑΣΗ

**E\_3.Μλ3ΘΟ(α)**

Θέλουμε, λοιπόν, να δείξουμε ότι, η εξίσωση  $f(x) = 2016$  έχει μοναδική ρίζα  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Όμως η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  και η τιμή  $2016 \in f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ .

Άρα η εξίσωση  $f(x) = 2016$ , έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Αυτή είναι μοναδική, καθώς η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ .

ΘΕΜΑΤΑ 2016

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016**  
Α΄ ΦΑΣΗ

**E\_3.Μλ3ΘΟ(α)**

**B4.** Ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$\begin{aligned}
 e^{3g(x)} + g^3(x) &= x^3 e^6 + (\ln x + 2)^3 \\
 \Leftrightarrow e^{3g(x)} + g^3(x) &= e^{\ln(x^3 e^6)} + (\ln x + 2)^3 \\
 \Leftrightarrow e^{3g(x)} + g^3(x) &= e^{\ln x^3 + \ln e^6} + (\ln x + 2)^3 \\
 \Leftrightarrow e^{3g(x)} + g^3(x) &= e^{3 \ln x + 6} + (\ln x + 2)^3 \\
 \Leftrightarrow e^{3g(x)} + g^3(x) &= e^{3(\ln x + 2)} + (\ln x + 2)^3 \\
 \Leftrightarrow -e^{3g(x)} - g^3(x) &= -e^{3(\ln x + 2)} - (\ln x + 2)^3 \\
 \Leftrightarrow -e^{3g(x)} - g^3(x) + 1 &= -e^{3(\ln x + 2)} - (\ln x + 2)^3 + 1 \\
 \Leftrightarrow f(g(x)) = f(\ln x + 2) &\Leftrightarrow g(x) = \ln x + 2.
 \end{aligned}$$

- Για την εύρεση της αντίστροφης της  $g$ , θέτουμε  $y = g(x)$  και λύνουμε ως προς  $x$ .

Έχουμε λοιπόν ισοδύναμα:

$$g(x) = y \Leftrightarrow y = \ln x + 2, y \in \mathbb{R}, \text{ καθώς } \ln x + 2 \in \mathbb{R}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

$$\left. \begin{aligned} \ln x = y - 2 &\Leftrightarrow x = e^{y-2}, y \in \mathbb{R} \\ \text{όμως } f^{-1}(y) &= x \end{aligned} \right\} \text{ οπότε } f^{-1}(y) = e^{y-2}, y \in \mathbb{R}$$

$$\text{και έτσι } f^{-1}(x) = e^{x-2}, x \in \mathbb{R}.$$

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** Για κάθε  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  έχουμε ισοδύναμα:

$$\begin{aligned}
 f^2(x) + 2xf(x) &= 1 - \sigma \nu \nu^2 x - x^2 \\
 \Leftrightarrow f^2(x) + 2xf(x) + x^2 &= \eta \mu^2 x \\
 \Leftrightarrow (f(x) + x)^2 &= \eta \mu^2 x \quad (1).
 \end{aligned}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $h(x) = f(x) + x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται  $h^2(x) = \eta \mu^2 x$  (2) και ισχύει για κάθε

$$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016  
 Α' ΦΑΣΗ

E\_3.Μλ3ΘΟ(α)

Η εξίσωση  $h(x) = 0$  στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  γράφεται ισοδύναμα:

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow h^2(x) = 0 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \eta\mu^2 x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Επομένως, η εξίσωση  $h(x) = 0$  έχει στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  μοναδική ρίζα την  $x = 0$ .

Η  $h$  στο  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  είναι συνεχής, ως άθροισμα συνεχών και δεν μηδενίζεται σ' αυτό. Άρα, στο  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  η  $h$  διατηρεί σταθερό πρόσημο.

$$\text{Όμως } h\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} > 0.$$

Συνεπώς για κάθε  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , ισχύουν  $h(x) > 0$  και  $\eta\mu x > 0$ .

Οπότε η σχέση (2) γίνεται ισοδύναμα  $h(x) = \eta\mu x$  ή ισοδύναμα  $f(x) + x = \eta\mu x$  και τελικά  $f(x) = \eta\mu x - x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . Επιπλέον ισχύει  $f(0) = \eta\mu 0 - 0 = 0$ .

Εντέλει δείξαμε ότι,  $f(x) = \eta\mu x - x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Γ2.

$$\text{Έχουμε } g(x) = \begin{cases} f(x) + 1, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \frac{\eta\mu(kx)}{x} - 1, & x < 0 \end{cases}, \text{ με } k \in \mathbb{R}.$$

-Για κάθε  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  η  $g$  είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών.

-Για κάθε  $x \in (-\infty, 0)$  η  $g$  είναι συνεχής γιατί προέρχεται από πράξεις με συνεχείς συναρτήσεις.

Επομένως, πρέπει η  $g$  να είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ . Οπότε ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = g(0) \quad (1).$$

$$\text{-Για } x > 0, \text{ έχουμε } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x) + 1) = f(0) + 1 = 1 \quad (2).$$

Έχουμε δείξει στο Γ1, ότι η  $f$  είναι συνεχής στο 0, οπότε  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$ .

$$\text{-Για } x < 0, \text{ έχουμε } \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[ \frac{\eta\mu(kx)}{x} - 1 \right] = k - 1 \quad (3).$$

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016**  
Α' ΦΑΣΗ

**E\_3.Μλ3ΘΟ(α)**

Αν θέσουμε  $u = κx$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow 0^-} u = \lim_{x \rightarrow 0^-} (κx) = 0$ .

Έτσι,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu(κx)}{x} = κ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu(κx)}{κx} = κ \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = κ \cdot 1 = κ$ .

Επίσης  $g(0) = f(0) + 1 = 1$  (4).

Η σχέση (1) λόγω των σχέσεων (2), (3) και (4) γίνεται ισοδύναμα:  
 $1 = κ - 1 = 1$ . Οπότε  $κ - 1 = 1$  και άρα  $κ = 2$ .

**Γ3.** Για  $κ = 2$  η  $g$  γίνεται:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) + 1, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \frac{\eta\mu 2x}{x} - 1, & x < 0 \end{cases}$$

Η  $g$  είναι ορισμένη και συνεχής στο  $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ .

$$\bullet \quad g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\eta\mu\left[2\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]}{-\frac{\pi}{2}} - 1 = \frac{\eta\mu(-\pi)}{-\frac{\pi}{2}} - 1 = \frac{\eta\mu\pi}{\frac{\pi}{2}} - 1 = 0 - 1 = -1$$

$$\bullet \quad g(0) = 1$$

$$\text{Άρα } g\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot g(0) < 0.$$

Έτσι από το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση  $g(x) = 0$ , έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα  $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ .

**Γ4.** Παρατηρούμε ότι  $g(-2\pi) = \frac{\eta\mu(-4\pi)}{-2\pi} - 1 = \frac{\eta\mu 4\pi}{2\pi} - 1 = 0 - 1 = -1$ . Επίσης από

$$\text{ερώτημα Γ3, } g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Έτσι ισχύει  $g(-2\pi) = g\left(-\frac{\pi}{2}\right)$  ενώ  $-2\pi \neq -\frac{\pi}{2}$ .

Ωστε η  $g$  δεν είναι 1-1.

Ένας δεύτερος τρόπος στην περίπτωση που δεν μπορούμε να υπολογίσουμε δύο ίσες τιμές, είτε στον ίδιο κλάδο, είτε σε διαφορετικούς κλάδους.

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016**  
Α' ΦΑΣΗ

**E\_3.Μλ3ΘΟ(α)**

Παρατηρούμε  $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1 = \eta\mu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 1 = 2 - \frac{\pi}{2}$ .

Θα δείξουμε ότι υπάρχει ένα  $x_0 \in (-\infty, 0)$ , ώστε  $g(x_0) = 2 - \frac{\pi}{2}$ .

Έχουμε  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\eta\mu 2x}{x} - 1\right) = 0 - 1 = -1$ , γιατί  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu 2x}{x} = 0$ .

Απόδειξη:

$$|\eta\mu 2x| \leq 1 \Leftrightarrow |\eta\mu 2x| \cdot \left|\frac{1}{x}\right| \leq \left|\frac{1}{x}\right|$$

$$\left|\frac{\eta\mu 2x}{x}\right| \leq \left|\frac{1}{x}\right| \Leftrightarrow -\left|\frac{1}{x}\right| \leq \frac{\eta\mu 2x}{x} \leq \left|\frac{1}{x}\right|$$

Όμως  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ , οπότε, από κριτήριο παρεμβολής  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu 2x}{x} = 0$ .

Ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta\mu 2x}{x} - 1\right) = 1$ .

Έστω η συνάρτηση  $\Lambda(x) = g(x) - \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $x < 0$ .

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \Lambda(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[g(x) - \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\right] = -1 - 2 + \frac{\pi}{2} = -3 + \frac{\pi}{2} < 0$ .

Άρα υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός  $a$ , κοντά στο  $-\infty$ , ώστε να ισχύει

ισοδύναμα:  $\Lambda(a) < 0 \Leftrightarrow g(a) - \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow g(a) < 2 - \frac{\pi}{2}$ .

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Lambda(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[g(x) - \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\eta\mu 2x}{x} - 1 - 2 + \frac{\pi}{2}\right] = 2 - 1 - 2 + \frac{\pi}{2} = -1 + \frac{\pi}{2} > 0$

Άρα υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός  $\beta < 0$ , κοντά στο  $0$ , ώστε να ισχύει

ισοδύναμα:

$$\Lambda(\beta) > 0 \Leftrightarrow g(\beta) - \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow g(\beta) > 2 - \frac{\pi}{2}$$

Επομένως  $g(a) < 2 - \frac{\pi}{2} < g(\beta)$  και η  $g$  είναι συνεχής στο  $[a, \beta] \subseteq (-\infty, 0)$ . Από

θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (a, \beta)$  άρα και στο  $(-\infty, 0)$

ώστε  $g(x_0) = 2 - \frac{\pi}{2}$ . Εντέλει  $g(x_0) = g\left(\frac{\pi}{2}\right)$  ενώ,  $x_0 \in (-\infty, 0)$  και  $\frac{\pi}{2} \in (0, +\infty)$ . Άρα

$x_0 \neq \frac{\pi}{2}$ . Οπότε η  $g$  δεν είναι 1-1.



**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.**  $f(x) = e^x + \frac{x^2}{2}, x \in \mathbb{R}.$

Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη με  $f'(x) = (e^x)' + (\frac{x^2}{2})' = e^x + x, x \in \mathbb{R}.$

Έστω  $x_1, x_2 \in \mathbb{R},$  με  $x_1 < x_2,$  τότε ισχύει  $e^{x_1} < e^{x_2}.$

Με πρόσθεση κατά μέλη, προκύπτει:  $e^{x_1} + x_1 < e^{x_2} + x_2,$  δηλαδή  $f'(x_1) < f'(x_2).$

Επομένως η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα.

Η  $f'$  είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα το σύνολο τιμών της είναι:

$$f'((-\infty, +\infty)) = \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

Οντως,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + x) = -\infty,$  γιατί  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  και  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty.$

Οντως,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x) = +\infty,$  γιατί  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$

Το  $0 \in f'(R) = \mathbb{R},$  άρα, υπάρχει ένας τουλάχιστον  $\rho \in \mathbb{R}$  τέτοιος ώστε  $f'(\rho) = 0.$

Ο  $\rho$  είναι μοναδικός, διότι η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα.

Τελικά, η εξίσωση  $f'(x) = 0$  έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα  $\rho.$

**Δ2.** Για  $x \neq \rho,$  έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow \rho} \frac{f(x) + f'(x) - f(\rho)}{x - \rho} \stackrel{f'(\rho)=0}{=} \lim_{x \rightarrow \rho} \left( \frac{f(x) - f(\rho)}{x - \rho} + \frac{f'(x) - f'(\rho)}{x - \rho} \right) =$$

$= f'(\rho) + f''(\rho) = 0 + e^\rho + 1 = e^\rho + 1,$  διότι η  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με  $f''(x) = e^x + 1, x \in \mathbb{R}.$

**Δ3. α)** Ισχύει:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + vh) - g(x_0)}{h} = v, v \in \mathbb{N}^*$  και  $v \neq 1.$

Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει το όριο  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$  και είναι ίσο με 1.

Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + vh) - g(x_0)}{vh} = \frac{1}{v} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + vh) - g(x_0)}{h} = \frac{1}{v} \cdot v = 1$$

Θέσαμε  $x_0 + vh = x \Leftrightarrow x - x_0 = vh \Leftrightarrow h = \frac{x - x_0}{v}.$

Αν  $x \rightarrow x_0$  τότε  $h \rightarrow 0.$

Επομένως,  $g'(x_0) = 1.$

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016**  
 Α΄ ΦΑΣΗ

**E\_3.Μλ3ΘΟ(α)**

β) Η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο της  $A(0, f(0))$  έχει εξίσωση:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 1 = x \Leftrightarrow y = x + 1.$$

Η εφαπτομένη της  $C_g$  στο σημείο της  $B(x_0, g(x_0))$  έχει εξίσωση:

$$y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - x_0 - 1 = 1(x - x_0) \Leftrightarrow y = x + 1.$$

Προφανώς οι δύο εφαπτόμενες συμπίπτουν.

Δ4. Η συνάρτηση  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  με  $g'(x_0) = 1$ .

Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $g(x_0) = x_0 + 1$ , με

$$f'(g(x_0)) = f'(x_0 + 1) = e^{x_0 + 1} + x_0 + 1.$$

Η  $f \circ g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , με:  $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0) = e^{x_0 + 1} + x_0 + 1.$