

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 3 Μαΐου 2015

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A.1.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 260-261.
A.2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 246.
A.3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 280.
A.4.

- i.** Σωστό
ii. Λάθος
iii. Σωστό
iv. Σωστό
v. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B.1. Έχουμε ότι:

$$\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1-2i\sqrt{3}-3}{4} = \frac{-2-2i\sqrt{3}}{4} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \text{ και}$$

$$\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = \frac{-(1+3)}{2} = -1 \text{ οπότε}$$

$$\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{99} = \left[\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3\right]^{33} = (-1)^{33} = -1$$

$$\text{Επίσης } \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1+2i-1}{2} = i \text{ οπότε } \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{100} = \left[\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right]^{50} = i^{50} = (i^4)^{12} \cdot i^2 = -1$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015
 Β' ΦΑΣΗ

E_3.ΒΜλ3ΘΤ(α)

$$\text{Συνεπώς } \left| z + \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right)^{99} \right|^2 + \left| z - \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^{100} \right|^2 = 4 \Leftrightarrow |z-1|^2 + |z+1|^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$(z-1)(\bar{z}-1) + (z+1)(\bar{z}+1) = 4 \Leftrightarrow z\bar{z} - z - \bar{z} + 1 + z\bar{z} + z + \bar{z} + 1 = 4 \Leftrightarrow$$

$$2z\bar{z} = 2 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1.$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του μιγαδικού z στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος (c) με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα ίση με 1, δηλαδή (c): $x^2 + y^2 = 1$

2^{ος} τρόπος

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right)^{99} &= \left(\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right)^{33} \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right)^{33} = \\ &= \left(\frac{1-2i\sqrt{3}-3}{4} \right)^{33} \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right)^{33} = \left(\frac{-2-2i\sqrt{3}}{4} \right)^{33} \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right)^{33} = \\ &= \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \right)^{33} \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right)^{33} = \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right)^{33} = \\ &= \left(\frac{1^2 - i^2 \sqrt{3}^2}{4} \right)^{33} = \left(\frac{1+3}{4} \right)^{33} = -1 \end{aligned}$$

Επίσης

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^{100} = \left[\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^2 \right]^{50} = \left(\frac{1+2i+i^2}{2} \right)^{50} = i^{50} = (i^4)^{12} \cdot i^2 = -1$$

Συνεπώς

$$|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4 \Leftrightarrow (z-1)(\bar{z}-1) + (z+1)(\bar{z}+1) = 4 \Leftrightarrow |z| = 1$$

B.2. Ισχύει ότι:

$$2w \cdot z - 2z - w + 4 = 0 \Leftrightarrow 2w \cdot z - 2z = w - 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2z(w-1) = w-4 \Rightarrow 2|z||w-1| = |w-4| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 1 \cdot |w-1| = |w-4| \Leftrightarrow 4|w-1|^2 = |w-4|^2 \Leftrightarrow$$

$$4(w-1)(\bar{w}-1) = (w-4)(\bar{w}-4) \Leftrightarrow$$

$$4(w\bar{w} - w - \bar{w} + 1) = w\bar{w} - 4w - 4\bar{w} + 16 \Leftrightarrow$$

$$4w\bar{w} - 4w - 4\bar{w} + 4 = w\bar{w} - 4w - 4\bar{w} + 16 \Leftrightarrow$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015
Β' ΦΑΣΗ

E_3.ΒΜλ3ΘΤ(α)

$$\Leftrightarrow 3w\bar{w} = 12 \Leftrightarrow |w|^2 = 4 \Leftrightarrow |w| = 2.$$

B.3. i. Αφού οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3 ανήκουν στον κύκλο (C) ισχύει ότι

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \text{ οπότε } |z_1|^2 = |z_2|^2 = |z_3|^2 = 1 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 = z_2\bar{z}_2 = z_3\bar{z}_3 = 1$$

συνεπώς, $\bar{z}_1 = \frac{1}{z_1}$, $\bar{z}_2 = \frac{1}{z_2}$ και $\bar{z}_3 = \frac{1}{z_3}$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3}{1 + z_1z_2z_3} = \frac{\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3 + \bar{z}_1\bar{z}_2 + \bar{z}_2\bar{z}_3 + \bar{z}_1\bar{z}_3}{1 + \bar{z}_1\bar{z}_2\bar{z}_3} = \\ &= \frac{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_1z_2} + \frac{1}{z_2z_3} + \frac{1}{z_1z_3}}{1 + \frac{1}{z_1z_2z_3}} = \frac{\frac{z_2z_3 + z_1z_3 + z_1z_2 + z_3 + z_1 + z_2}{z_1z_2z_3}}{\frac{z_1z_2z_3 + 1}{z_1z_2z_3}} = t \end{aligned}$$

άρα $t \in \mathbb{R}$.

ii. Ισχύει $\left| \frac{z_1 - w}{w - z_2} \right| = \frac{|z_1 - w|}{|w - z_2|} \leq \frac{|z_1| + |w|}{|w - z_2|} \leq \frac{|z_1| + |w|}{\left| |w| - |z_2| \right|} = \frac{1 + 2}{|2 - 1|} = 3$ και

$$\left| \frac{z_1 - w}{w - z_2} \right| = \frac{|z_1 - w|}{|w - z_2|} \geq \frac{\left| |z_1| - |w| \right|}{|w - z_2|} \geq \frac{\left| |z_1| - |w| \right|}{|w| + |z_2|} = \frac{|1 - 2|}{2 + 1} = \frac{1}{3} \text{ άρα } \frac{1}{3} \leq \left| \frac{z_1 - w}{w - z_2} \right| \leq 3$$

2ος Τρόπος

Ισχύει $\left| |z_1| - |w| \right| \leq |z_1 - w| \leq |z_1| + |w| \Leftrightarrow 1 \leq |z_1 - w| \leq 3$ και

$$\left| |w| - |z_2| \right| \leq |w - z_2| \leq |w| + |z_2| \Leftrightarrow 1 \leq |w - z_2| \leq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{|w - z_2|} \leq 1$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη και έχουμε

$$\frac{1}{3} \leq \left| \frac{z_1 - w}{w - z_2} \right| \leq 3$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x > -1$ έχουμε:

$$f'(x) - f(x) = \frac{1}{x+1} - \ln(x+1) - 3 \Leftrightarrow f'(x) - \frac{1}{x+1} - f(x) + \ln(x+1) = -3 \Leftrightarrow$$

$$\left[f(x) - \ln(x+1) \right]' - \left[f(x) - \ln(x+1) \right] = -3 \quad (1).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = f(x) - \ln(x+1)$ (2). Τότε η (1) γίνεται:

$$F'(x) - F(x) = -3 \Leftrightarrow F'(x) \cdot e^{-x} - F(x) \cdot e^{-x} = -3e^{-x} \Leftrightarrow (F(x) \cdot e^{-x})' = (3e^{-x})'$$

$$\text{Τότε } F(x) \cdot e^{-x} = 3e^{-x} + c \Leftrightarrow F(x) = 3 + ce^x \Leftrightarrow f(x) - \ln(x+1) = 3 + ce^x \quad (2)$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ έχουμε } f(0) - \ln(0+1) = 3 + ce^0 \Leftrightarrow 2 = 3 + c \Leftrightarrow c = -1.$$

$$\text{Άρα } f(x) = 3 - e^x + \ln(x+1).$$

2ος Τρόπος

Για κάθε $x > -1$ έχουμε

$$f'(x) - f(x) = \frac{1}{x+1} - \ln(x+1) - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} \cdot f'(x) - e^{-x} \cdot f(x) = e^{-x} \cdot \frac{1}{x+1} - e^{-x} \cdot \ln(x+1) - 3e^{-x} \Leftrightarrow$$

$$e^{-x} \cdot f(x) = e^{-x} \cdot \ln(x+1) + 3e^{-x} + c \Leftrightarrow f(x) = \ln(x+1) + 3 + c \cdot e^x$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ έχουμε } f(0) = \ln(0+1) + c \cdot e^0 \Leftrightarrow 2 = 3 + c \Leftrightarrow c = -1.$$

$$\text{Άρα } f(x) = 3 - e^x + \ln(x+1).$$

Γ.2. α. Έχουμε $e^x - \ln(x+1) = 3 \Leftrightarrow 3 - e^x + \ln(x+1) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

Είναι:

$$f'(x) = -e^x + \frac{1}{x+1} \text{ και } f''(x) = -e^x - \frac{1}{(x+1)^2} < 0.$$

Άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα και ισχύει $f'(0) = -e^0 + \frac{1}{0+1} = 0$.

Τότε

- Για $x < 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

- Για $x > 0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(0) \Leftrightarrow f'(x) < 0$

x	-1	0	$+\infty$
f'(x)	+	0	-
f(x)	↗		↘

Σύνολο τιμών

- Αν $x \in A_1 = (-1, 0]$ τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής ισχύει $f(A_1) = f((-1, 0]) = \left(\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x), f(0) \right] = (-\infty, 2]$ γιατί

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (3 - e^x + \ln(x+1)) = -\infty \text{ και } f(0) = 2$$

- Αν $x \in A_2 = [0, +\infty)$ τότε επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής ισχύει $f(A_2) = f([0, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(0) \right) = (-\infty, 2]$ γιατί

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - e^x + \ln(x+1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(3e^{-x} - 1 + \frac{\ln(x+1)}{e^x} \right) = -\infty$$

όπου $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{e^x} \stackrel{\text{D.L.H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{e^x} = 0 \cdot 0 = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$

Άρα υπάρχουν $\rho_1 \in (-1, 0)$ και $\rho_2 \in (0, +\infty)$ μοναδικά (λόγω μονοτονίας) τέτοια ώστε $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$, δηλαδή η εξίσωση $e^x - \ln(x+1) = 3$ έχει ακριβώς δύο ετερόσημες ρίζες ρ_1, ρ_2 στο διάστημα $(-1, +\infty)$.

β. Είναι

$$3 + \ln(x+1) = e^x + \alpha x^3 \Leftrightarrow 3 - e^x + \ln(x+1) - \alpha x^3 = 0 \Leftrightarrow f(x) - \alpha x^3 = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $k(x) = f(x) - \alpha x^3$

Για την συνάρτηση k ισχύουν:

- Είναι συνεχής στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

$$k(\rho_1) = f(\rho_1) - \alpha \rho_1^3 = -\alpha \rho_1^3$$

$$k(\rho_2) = f(\rho_2) - \alpha \rho_2^3 = -\alpha \rho_2^3$$

$$\text{Τότε } k(\rho_1) \cdot k(\rho_2) = \alpha^2 \rho_1^3 \rho_2^3 \quad (1)$$

- Αν $\alpha = 0$ τότε $k(\rho_1) \cdot k(\rho_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k(\rho_1) = 0 \Leftrightarrow \rho_1 \text{ ρίζα} \\ k(\rho_2) = 0 \Leftrightarrow \rho_2 \text{ ρίζα} \end{cases}$

- Αν $\alpha \neq 0$ τότε $k(\rho_1) \cdot k(\rho_2) < 0$, από τη σχέση (1) γιατί $\rho_1 \rho_2 < 0$.

Από Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho \in (\rho_1, \rho_2)$ ώστε $k(\rho) = 0$

Τελικά υπάρχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015
Β' ΦΑΣΗ

E_3.ΒΜλ3ΘΤ(α)

γ. Παρατηρούμε ότι:

$$\ln(\ln x + 1) + e^{x-1} > \ln x + x \Leftrightarrow \ln(\ln x + 1) - x + 3 > \ln(x - 1 + 1) - e^{x-1} + 3 \Leftrightarrow$$

$$f(\ln x) > f(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad \overset{f \text{ γνησ. φθίν.}}{\ln x} < x-1 \quad (\text{από το ερώτημα (α)})$$

που ισχύει για κάθε $x > 1$, λόγω εφαρμογής 2 του σχολικού σελίδα 266.

Γ.3. Είναι

$$G(x) = \frac{2 - f(x) + \ln(x+1)}{x \cdot e^x + 1} = \frac{2 - (3 - e^x + \ln(x+1)) + \ln(x+1)}{x \cdot e^x + 1} = \frac{e^x - 1}{x \cdot e^x + 1}$$

Τότε

$$G'(x) = \frac{(e^x - 1)'(x \cdot e^x + 1) - (e^x - 1)(x \cdot e^x + 1)'}{(x \cdot e^x + 1)^2} = \frac{e^x(x \cdot e^x + 1) - (e^x - 1)(e^x + x \cdot e^x)}{(x \cdot e^x + 1)^2} =$$

$$G'(x) = \frac{e^x[(x \cdot e^x + 1) - (e^x - 1)(1 + x)]}{(x \cdot e^x + 1)^2} = \frac{e^x(x \cdot e^x + 1 - e^x - x \cdot e^x + 1 + x)}{(x \cdot e^x + 1)^2} = \frac{e^x(x - e^x + 2)}{(x \cdot e^x + 1)^2}$$

Είναι $\frac{e^x}{(x \cdot e^x + 1)^2} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x - e^x + 2, x \in \mathbb{R}$, οπότε

$$G'(x) = \frac{e^x}{(x \cdot e^x + 1)^2} \cdot g(x)$$

Είναι

- $g'(x) = 1 - e^x$ και αν $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$
- Αν $g'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$. Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα.
- Αν $g'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - e^x < 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$. Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα.

Για κάθε $x > -1$ έχουμε:

x	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	↗		↘

Η g παρουσιάζει μέγιστη τιμή την $g(0) = 1$.

Σύνολο τιμών της g

- Αν $x \in A_1 = (-1, 0]$ τότε επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα ισχύει
 $g(A_1) = g((-1, 0]) = \left(\lim_{x \rightarrow -1} g(x), g(0) \right] = \left(1 - \frac{1}{e}, 1 \right]$ γιατί

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x - e^x + 2) = 1 - \frac{1}{e} > 0$$

Τότε δεν υπάρχει λύση γιατί $g(x) \neq 0 \Rightarrow G'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (-1, 0]$.

- Αν $x \in A_2 = [0, +\infty)$ τότε η g είναι γνησίως φθίνουσα και ισχύει
 $g(A_2) = g([0, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), g(0) \right] = (-\infty, 1]$ γιατί

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - e^x + 1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{e^x}{x} + \frac{1}{x} \right) = -\infty \text{ όπου}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

Τότε υπάρχει μοναδικό $x_0 > 0$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \in g(A_2)$

g γνησ. φθίν.

$$\text{Για } x < x_0 \Leftrightarrow g(x) > g(x_0) \Leftrightarrow g(x) > 0 \Leftrightarrow G'(x) > 0$$

g γνησ. φθίν.

$$\text{Για } x > x_0 \Leftrightarrow g(x) < g(x_0) \Leftrightarrow g(x) < 0 \Leftrightarrow G'(x) < 0$$

Άρα η G είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, x_0]$, γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, +\infty)$ και $G(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο (μοναδικό).

Από την σχέση $g(x_0) = 0$ έχουμε $x_0 - e^{x_0} + 2 = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = x_0 + 2$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1. α. Έχουμε

$G'(x) = G(x) + e^x \cdot f(x)$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$ και η G' είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων της G και του γινομένου $e^x \cdot f(x)$ (εκθετική και από υπόθεση) με παράγωγο

$$G''(x) = G'(x) + e^x \cdot f(x) + e^x \cdot f'(x) = G(x) + e^x \cdot f(x) + e^x \cdot f(x) + e^x \cdot f'(x) = e^x \int_0^x f(t) dt + 2e^x f(x) + e^x f'(x) = e^x \left(\int_0^x f(t) dt + 2f(x) + f'(x) \right) > 0 \text{ διότι}$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015
Β' ΦΑΣΗ

E_3.ΒΜλ3ΘΤ(α)

$$H'(x) = (e^{2x} \cdot f(x))' = (e^{2x})' \cdot f(x) + e^{2x} \cdot f'(x) = e^{2x} (2f(x) + f'(x))$$

Αλλά η συνάρτηση H είναι γνησίως αύξουσα οπότε ισχύει $H'(x) \geq 0$.
 (Σχόλιο σχ. βιβλίου 254).

$$\text{Άρα } e^{2x} (2f(x) + f'(x)) \geq 0 \Leftrightarrow 2f(x) + f'(x) \geq 0 \quad (1)$$

$$\text{Επίσης για } t > 0 \xRightarrow{H \text{ γν. αύξ}} H(t) > H(0) \Rightarrow H(t) > e^0 f(0) \Rightarrow H(t) > 1 > 0 \Rightarrow$$

$$e^{2t} \cdot f(t) > 0 \Rightarrow f(t) > 0 \Rightarrow \int_0^x f(t) dt > 0 \quad (2).$$

$$\text{Από (1) και (2) με πρόσθεση έχουμε } \int_0^x f(t) dt + 2f(x) + f'(x) > 0$$

Άρα η συνάρτηση G είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

- β.**
- η συνάρτηση G είναι συνεχής στο διάστημα $[0, x]$
 - παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, x)$ με $G'(x) = e^x \cdot f(x) + e^x \cdot \int_0^x f(t) dt$
- Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, x)$ ώστε

$$G'(\xi) = \frac{G(x) - G(0)}{x - 0} = \frac{G(x)}{x}$$

- Αφού η G είναι κυρτή η G' είναι γνησίως αύξουσα. Άρα για:

$$0 < \xi < x \Leftrightarrow G'(0) < G'(\xi) < G'(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow G(0) + e^0 f(0) < \frac{G(x)}{x} < G'(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 < \frac{G(x)}{x} < G'(x) \Leftrightarrow x < G(x) < x \cdot G'(x) \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty) .$$

2^{ος} Τρόπος

Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $\varphi(x) = G(x) - x$ με

$$\varphi'(x) = G'(x) - 1 \text{ και την } h(x) = x \cdot G'(x) - G(x) \text{ με}$$

$$h'(x) = G'(x) + x \cdot G''(x) - G'(x) = x \cdot G''(x).$$

- Για $x > 0 \xRightarrow{G' \text{ γν. αύξ}} G'(x) > G'(0) \Leftrightarrow G'(x) > 1 \Leftrightarrow G'(x) - 1 > 0 \Leftrightarrow \varphi'(x) > 0$

Επομένως η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα οπότε έχουμε:

$$\text{Για } x > 0 \Leftrightarrow \varphi(x) > \varphi(0) \Leftrightarrow G(x) - x > 0 \Leftrightarrow G(x) > x \quad (3)$$

- Ισχύει $h'(x) = x \cdot G''(x) > 0$

Επομένως η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα οπότε έχουμε:

Για $x > 0 \Leftrightarrow h(x) > h(0) \Leftrightarrow h(x) > 0 \Leftrightarrow x \cdot G'(x) > G(x)$ (4)

Από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει $x < G(x) < x \cdot G'(x)$

γ. Επιπλέον ισχύει:

$$G(x) < x \cdot G'(x) \Rightarrow x \cdot G'(x) - G(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

Η συνάρτηση $h(x) = x \cdot G'(x) - G(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση διότι

- Η συνάρτηση $H_1(x) = x$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική
- Η συνάρτηση G' αφού ορίζεται η G'' , όπως και η G που αναφέρεται παραπάνω είναι συνεχής. Επομένως η $h(x)$ είναι συνεχής για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και $x_0 \in (0, 1)$.

Έχουμε:

$$h(x) > 0 \Rightarrow \int_{x_0}^1 h(x) dx > 0 \Leftrightarrow (\text{γιατί η } h \text{ δεν είναι πάντα μηδέν}).$$

$$\Leftrightarrow \int_{x_0}^1 (x \cdot G'(x) - G(x)) dx > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{x_0}^1 x \cdot G'(x) dx - \int_{x_0}^1 G(x) dx > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [x \cdot G(x)]_{x_0}^1 - \int_{x_0}^1 (x)' \cdot G(x) dx - \int_{x_0}^1 G(x) dx > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow G(1) - x_0 \cdot G(x_0) - \int_{x_0}^1 G(x) dx - \int_{x_0}^1 G(x) dx > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow G(1) - x_0 \cdot G(x_0) > 2 \int_{x_0}^1 G(x) dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{x_0}^1 G(x) dx < \frac{G(1) - x_0 \cdot G(x_0)}{2}.$$

Δ.2. Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x x \cdot f(t) dt - x^2}{x - \eta \mu x} = \frac{0}{0} \text{ γιατί}$$

Η συνάρτηση $f_1(x) = x$ είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική.

Η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη οπότε η $f_2(x) = \int_0^x f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη.

Η συνάρτηση $f_3(x) = x^2$ είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015
Β' ΦΑΣΗ

E_3.ΒΜΛ3ΘΤ(α)

Η συνάρτηση $f_4(x) = \int_0^x x \cdot f(t) dt = x \cdot \int_0^x f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Η συνάρτηση $f_5(x) = \int_0^x x \cdot f(t) dt - x^2$ είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Η συνάρτηση $f_6(x) = \eta\mu x$ είναι παραγωγίσιμη ως τριγωνομετρική.

Η συνάρτηση $f_7(x) = x - \eta\mu x$ είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Άρα οι συναρτήσεις f_5 και f_7 είναι παραγωγίσιμες και έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\int_0^x x \cdot f(t) dt - x^2 \right) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} (x - \eta\mu x) = 0$$

Επομένως έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\left(\frac{0}{0}\right)$ και οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες κοντά στο μηδέν. Για την άρση της απροσδιοριστίας το όριο κοντά στο μηδέν γράφεται

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x x \cdot f(t) dt - x^2}{x - \eta\mu x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \int_0^x f(t) dt - x^2}{x - \eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \left(\int_0^x f(t) dt - x \right)}{x - \eta\mu x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cdot \left(\int_0^x f(t) dt - x \right)}{x^2 (x - \eta\mu x)} = 6 \cdot \frac{2015}{6} = 2015 \end{aligned}$$

γιατί με εφαρμογή του κανόνα De L'Hospital αφού ισχύουν οι προϋποθέσεις του έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x - \eta\mu x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^3)'}{(x - \eta\mu x)'} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{1 - \sigma\upsilon\nu x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3x^2)'}{(1 - \sigma\upsilon\nu x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{\eta\mu x} = 6$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt - x}{x^2} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^x f(t) dt - x \right)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^x f(t) dt \right)' - 1}{2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{2x} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{2} \cdot f'(0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2015}{3} = \frac{2015}{6} \end{aligned}$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015
 Β' ΦΑΣΗ

E_3.ΒΜλ3ΘΤ(α)

2^{ος} Τρόπος

Έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x x \cdot f(t) dt - x^2}{x - \eta\mu x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \int_0^x f(t) dt - x^2}{x - \eta\mu x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x \cdot \int_0^x f(t) dt \right)' - 2x}{(x - \eta\mu x)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot f(x) + \int_0^x f(t) dt - 2x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \cdot f(x) - x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} + \frac{\int_0^x f(t) dt - x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \cdot f(x) - x}{x^2} \cdot \frac{x^2}{1 - \sigma\upsilon\nu x} + \frac{\int_0^x f(t) dt - x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - 1}{x} \cdot \frac{x^2}{1 - \sigma\upsilon\nu x} + \frac{\int_0^x f(t) dt - x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} \right) = \frac{2015}{3} \cdot 2 + \frac{2015}{3} = 2015 \end{aligned}$$

γιατί με εφαρμογή του κανόνα De L' Hospital αφού ισχύουν οι προϋποθέσεις του έχουμε:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = \frac{2015}{3}$,
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \sigma\upsilon\nu x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2)'}{(1 - \sigma\upsilon\nu x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\frac{\eta\mu x}{x}} = \frac{2}{1} = 2$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt - x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \cdot \frac{x}{\eta\mu x} = f'(0) \cdot 1 = \frac{2015}{3}$

Δ.3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = \int_x^{x+1} G(t) dt$ η οποία ορίζεται στο $[0, +\infty)$ αφού η G είναι συνεχής σε αυτό και οι συναρτήσεις $x, x+1$ έχουν πεδίο ορισμού το \mathbb{R} και θα πρέπει:

$$\left. \begin{aligned} x &\in \mathbb{R} \\ x &\geq 0 \\ x+1 &\geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x \geq 0.$$

Άρα το $D_F = [0, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό με παράγωγο που ορίζεται ως εξής:

Έστω $\alpha \in [0, +\infty)$. Τότε

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x+1} G(t) dt - \int_{\alpha}^x G(t) dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F'(x) = G(x+1)(x+1)' - G(x) = G(x+1) - G(x)$$

- Η F συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[x, x+1] \subseteq [0, +\infty)$. Επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την F στο διάστημα $[x, x+1]$ οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο ώστε

$$F'(\xi) = \frac{F(x+1) - F(x)}{x+1 - x} = F(x+1) - F(x) = \int_{x+1}^{x+2} G(t) dt - \int_x^{x+1} G(t) dt$$

- Μονοτονία της F'

Έχουμε: $F''(x) = G'(x+1)(x+1)' - G'(x) = G'(x+1) - G'(x) > 0$ για κάθε στο $[0, +\infty)$ αφού στο $\Delta 1$ δείξαμε ότι η G είναι κυρτή άρα η G' είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει:

$$x < x+1 \stackrel{G' \text{ γν. αύξ.}}{\Rightarrow} G'(x) < G'(x+1) \Rightarrow G'(x+1) - G'(x) > 0 \Leftrightarrow F''(x) > 0$$

οπότε η F' είναι γνησίως αύξουσα.

- Διάταξη

Ισχύει ότι:

$$\xi \in (x, x+1) \Leftrightarrow x < \xi < x+1 \Rightarrow \xi < x+1 \stackrel{F' \text{ γν. αύξ.}}{\Rightarrow} F'(\xi) < F'(x+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{x+1}^{x+2} G(t) dt < \int_x^{x+1} G(t) dt < G(x+2) - G(x+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow G(x+1) + \int_{x+1}^{x+2} G(t) dt < G(x+2) + \int_x^{x+1} G(t) dt$$

2^{ος} Τρόπος

Θεωρούμε την συνάρτηση $\omega(x) = G(x+1) - \int_x^{x+1} G(t) dt$, $x > 0$.

Έχουμε για $\alpha \in (0, +\infty)$

$$\omega'(x) = G'(x+1) - \left(\int_x^{x+1} G(t) dt \right)' = G'(x+1) - \left(\int_{\alpha}^{x+1} G(t) dt - \int_{\alpha}^x G(t) dt \right)' =$$

$$\begin{aligned}
 &= G'(x+1) - G(x+1) + G(x) = \\
 &= e^{x+1} \int_{\alpha}^{x+1} f(t) dt + e^{x+1} \cdot f(x+1) - e^{x+1} \int_{\alpha}^{x+1} f(t) dt + e^x \int_{\alpha}^x f(t) dt = \\
 &= e^{x+1} \cdot f(x+1) + e^x \int_{\alpha}^x f(t) dt > 0 \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).
 \end{aligned}$$

Επομένως η συνάρτηση ω είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Ισχύει

$$\begin{aligned}
 x < x+1 &\Leftrightarrow \omega(x) < \omega(x+1) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow G(x+1) - \int_x^{x+1} G(t) dt < G(x+2) - \int_{x+1}^{x+2} G(t) dt \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow G(x+1) + \int_{x+1}^{x+2} G(t) dt < G(x+2) + \int_x^{x+1} G(t) dt
 \end{aligned}$$

Δ.4. Είναι

$$\begin{aligned}
 F(1) &= \int_0^1 e^t \cdot f'(t) dt = \left[e^t \cdot f(t) \right]_0^1 - \int_0^1 (e^t)' \cdot f(t) dt = \\
 &= e \cdot f(1) - f(0) - \int_0^1 e^t \cdot f(t) dt \quad (1)
 \end{aligned}$$

Αλλά από υπόθεση ισχύει $F(1) = e \cdot f(1) - 2$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει

$$\begin{aligned}
 e \cdot f(1) - 2 &= e \cdot f(1) - f(0) - \int_0^1 e^t \cdot f(t) dt \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow -2 &= -1 - \int_0^1 e^t \cdot f(t) dt \Leftrightarrow \int_0^1 e^t \cdot f(t) dt = 1 \quad (3)
 \end{aligned}$$

Επίσης

$G(0) = 0$ και $G'(x) = G(x) + e^x f(x)$ οπότε $G'(0) = G(0) + e^0 f(0) = f(0) = 1$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $O(0, G(0))$ είναι:

$$y - G(0) = G'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = x$$

Επειδή η G είναι κυρτή και η $y = x$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της G στο σημείο $O(0, G(0))$ ισχύει ότι $G(x) - x \geq 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

Επειδή η $G(x) - x$ είναι συνεχής το εμβαδόν είναι

$$\begin{aligned}
 E &= \int_0^1 (G(x) - x) dx = \\
 &= \int_0^1 G(x) dx - \int_0^1 x dx = \int_0^1 e^x \left(\int_0^x f(t) dt \right) dx - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 =
 \end{aligned}$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015
 Β' ΦΑΣΗ

E_3.ΒΜλ3ΘΤ(α)

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 (e^x)' \left(\int_0^x f(t) dt \right) dx - \frac{1}{2} = \\
 &= \left[e^x \left(\int_0^x f(t) dt \right) \right]_0^1 - \int_0^1 e^x \left(\int_0^x f(t) dt \right)' dx - \frac{1}{2} = \\
 &= e \int_0^1 f(t) dt - e^0 \int_0^0 f(t) dt - \int_0^1 e^x f(x) dx - \frac{1}{2} \stackrel{(3)}{=} \\
 &= G(1) - 1 - \frac{1}{2} = \frac{2G(1) - 3}{2}
 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑΤΑ 2015