ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΆΛΓΕΒΡΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

Ημερομηνία: Κυριακή 10 Μαΐου 2015
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη (βλέπε σχολικό σελ. 135)

Α2. Σχολικό σελίδα 97.

Α3. Για την $f(x)=\alpha^x$ έχουμε:

- πεδίο ορισμού το $A=\Re$
- σύνολο τιμών το $B=(0,+\infty)$.

Για την $g(x)=\log_\alpha x$, με $0<\alpha\neq 1$ έχουμε:

- πεδίο ορισμού το $A=(0,+\infty)$
- σύνολο τιμών το $B=\Re$

Α4. **α.** ΛΑΘΟΣ
β. ΛΑΘΟΣ
γ. ΛΑΘΟΣ
δ. ΣΩΣΤΟ
ε. ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ Β

Έχουμε $f(x)=2\sigma\upsilon\nu 2x-1$

Β1. Αφού $-1\leq \sigma\upsilon\nu 2x\leq 1 \overset{2}{\Leftrightarrow}$

$-2\leq 2\sigma\upsilon\nu 2x\leq 2 \overset{-1}{\Leftrightarrow}$

$-3\leq 2\sigma\upsilon\nu 2x-1\leq 1\Leftrightarrow$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)\leq f(x)\leq f(0)$. Έτσι έχουμε $\boxed{\max f=1}$, $\boxed{\min f=-3}$.

Η περίοδος της f είναι $T = \frac{2\pi}{2} \Leftrightarrow \boxed{T = \pi}$

Β2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$

$2x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \boxed{x = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{6},\ \kappa \in z}$

Αφού $0 \le x \le 2\pi \Leftrightarrow 0 \le \kappa\pi + \frac{\pi}{6} \le 2\pi \Leftrightarrow$

$-\frac{\pi}{6} \le \kappa\pi \le \frac{11\pi}{6} \Leftrightarrow -\frac{1}{6} \le \kappa \le \frac{11}{6} \overset{\kappa\in z}{\Leftrightarrow}$

- $\kappa = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{6}}$
- $\kappa = 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{7\pi}{6}}$

Αφού $0 \le x \le 2\pi \Leftrightarrow 0 \le \kappa\pi - \frac{\pi}{6} \le 2\pi \Leftrightarrow$

$\frac{\pi}{6} \le \kappa\pi \le \frac{13\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{6} \le \kappa \le \frac{13}{6} \overset{\kappa\in z}{\Leftrightarrow}$

- $\kappa = 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{5\pi}{6}}$
- $\kappa = 2 \Rightarrow \boxed{x = \frac{11\pi}{6}}$

Έτσι η C_f τέμνει τον $x'x$ στα σημεία: $A\left(\frac{\pi}{6},0\right)$, $B\left(\frac{7\pi}{6},0\right)$, $\Gamma\left(\frac{5\pi}{6},0\right)$ και $\Delta\left(\frac{11\pi}{6},0\right)$.

Β3. Υπολογίζουμε:

- $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} - 1 = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \sqrt{3} - 1$
- $f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6} - 1 = 2\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) - 1 = -2\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} - 1 = -2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = -\sqrt{3} - 1$

- $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot συν\frac{\pi}{3} - 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0$
- $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot συν\frac{\pi}{2} - 1 = 2 \cdot 0 - 1 = -1$

Έτσι $K = \frac{(\sqrt{3}-1)\cdot(-\sqrt{3}-1)+0}{1-(-1)} = \frac{-(\sqrt{3}-1)\cdot(\sqrt{3}+1)}{2} = \frac{-(\sqrt{3}^2-1^2)}{2} = \frac{-2}{2} = \boxed{-1}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε $P(x) = x^3 + αx^2 + βx + γ$

- $P(-2) = 24 \Leftrightarrow -8 + 4α - 2β + γ = 24 \Leftrightarrow 4α - 2β + γ = 32 \;(1)$
- $P(0) = 8 \Leftrightarrow \boxed{γ = 8}$
- $P(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + α + β + γ = 0 \Leftrightarrow α + β + γ = -1 \;(2)$

Έτσι $\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix} \overset{\gamma=8}{\Rightarrow} \begin{cases} 4\alpha - 2\beta = 24 \\ \alpha + \beta = -9 \end{cases} \Bigg| \cdot 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha - 2\beta = 24 \\ 2\alpha + 2\beta = -18 \end{cases} + \{6\alpha = 6 \Leftrightarrow \alpha = 1$

$(2) \Rightarrow 1 + \beta + 8 = -1 \Leftrightarrow \boxed{β = -10}$

Γ2. **α)** Το πολυώνυμο γίνεται: $f(x) = x^3 + x^2 + 10x + 8$. Με το σχήμα Horner για $x = 1$ βρίσκουμε:

1	1	-10	8	x=1
	1	2	–8	
1	2	–8	0	

Οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ γίνεται $(x-1)(x^2+2x-8) = 0$, επομένως $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x^2 + 2x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = -4$. Άρα οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι οι -4 , 1 , 2.

β) Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$, όταν $f(x) < 0$.

Η ανίσωση $f(x) < 0$ αληθεύει όταν $x \in (-\infty, -4) \cup (1, 2)$.

x	$-\infty$		-4		1		2		$+\infty$
$x-1$		$-$	$\mid$	$-$	0	$+$	$\mid$	$+$	
x^2+2x-8		$+$	0	$-$	$\mid$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Γ3. $\dfrac{x+4}{f(x)} \le \dfrac{2}{f(x)+f(-x)-18}$ **(1)**

Είναι $f(-x)=(-x)^3+(-x)^2-10(-x)+8=-x^3+x^2+10x+8$, επομένως $f(x)+f(-x)-18=$

$=x^3+x^2-10x+8-x^3+x^2+10x+8-18=2x^2-2=2(x^2-1)$.

Πρέπει $f(x)\ne 0 \Leftrightarrow x\ne -4,1,2$ και $f(x)+f(-x)-18\ne 0 \Leftrightarrow 2(x^2-1)\ne 0 \Leftrightarrow x^2\ne 1 \Leftrightarrow x\ne \pm 1$, επομένως συνολικά οι περιορισμοί είναι $x\ne -4,-1,1,2$ η ανίσωση **(1)** γίνεται:

$$\frac{x+4}{f(x)}-\frac{2}{f(x)+f(-x)-18}\le 0 \Leftrightarrow \frac{x+4}{x^3+x^2-10x+8}-\frac{2}{2(x^2-1)}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+4}{(x+4)(x-1)(x-2)}-\frac{2}{2(x-1)(x+1)}\le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)(x-2)}-\frac{1}{(x-1)(x+1)}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1-(x-2)}{(x-1)(x+1)(x-2)}\le 0 \Leftrightarrow \frac{x+1-x+2}{(x-1)(x+1)(x-2)}\le 0 \Leftrightarrow \frac{3}{(x-1)(x+1)(x-2)}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(x-1)(x+1)(x-2)\le 0.$$

Είναι $x-1\le 0 \Leftrightarrow x\le 1$, $x+1\le 0 \Leftrightarrow x\le -1$, $x-2\le 0 \Leftrightarrow x\le 2$

x	$-\infty$		-4		-1		1		2		$+\infty$
$x-1$		$-$	$\Vert$	$-$	$\mid$	$-$	0	$+$	$\mid$	$+$	
$x+1$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\mid$	$+$	$\mid$	$+$	
$x-2$		$-$	$\Vert$	$-$	$\mid$	$-$	$\mid$	$-$	0	$+$	
Γ		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Η ανίσωση αληθεύει όταν $x\in(-\infty,-4)\cup(-4,-1)\cup(1,2)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. **α)** Είναι $f(\ln x)=2^{\ln x}-\left(\frac{1}{2}\right)^{\ln x}=2^{\ln x}-\frac{1}{2^{\ln x}}$, με $x>0$.

β) Πρέπει $x>0$ και $f(\ln x)>0$, οπότε $2^{\ln x}-\frac{1}{2^{\ln x}}>0 \Leftrightarrow \left(2^{\ln x}\right)^2-1>0$ (αφού είναι $2^{\ln x}>0$)

$\left(2^{\ln x}-1\right)\cdot\left(2^{\ln x}+1\right)>0$ και επειδή είναι $2^{\ln x}+1>0$ για κάθε $x>0$, τότε $2^{\ln x}-1>0 \Leftrightarrow 2^{\ln x}>1 \Leftrightarrow 2^{\ln x}>2^0 \Leftrightarrow \ln x>0 \Leftrightarrow \ln x>\ln 1 \Leftrightarrow x>1$.

Οι ανισώσεις $x>0$ και $x>1$ συναληθεύουν όταν $x\in(1,+\infty)$, επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το $(1,+\infty)$.

Δ2. Είναι $h(x)=\ln\frac{3}{x}+\ln\left(1-\frac{1}{x+1}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{x+2}\right)+\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)=$

$=\ln\frac{3}{x}+\ln\frac{x+1-1}{x+1}+\ln\frac{x+2-1}{x+2}+\ln\frac{2+x}{2}=$

$=\ln\frac{3}{x}+\ln\frac{x}{x+1}+\ln\frac{x+1}{x+2}+\ln\frac{x+2}{2}$.

Για $x>0$ είναι $\frac{3}{x}>0$, $\frac{x}{x+1}>0$, $\frac{x+1}{x+2}>0$, $\frac{x+2}{2}>0$,

οπότε $h(x)=\ln\left(\frac{3}{x}\cdot\frac{x}{x+1}\cdot\frac{x+1}{x+2}\cdot\frac{x+2}{2}\right)=\ln\frac{3}{2}$.

Δ3. Για $x>1$ έχουμε

$h(x)=g(x)$, $\ln\frac{3}{2}=\ln\left(f(\ln x)\right)\Leftrightarrow f(\ln x)=\frac{3}{2}\Leftrightarrow 2^{\ln x}-\frac{1}{2^{\ln x}}=\frac{3}{2}$.

Θέτουμε $2^{\ln x}=\omega>0$, οπότε η εξίσωση γίνεται:

$\omega-\frac{1}{\omega}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow 2\omega^2-3\omega-2=0\Leftrightarrow \omega=2$ ή $\omega=-\frac{1}{2}$

Η τιμή $\omega=-\frac{1}{2}$ απορρίπτεται γιατί $-\frac{1}{2}<0$, οπότε

$\omega=2$, $2^{\ln x}=2\Leftrightarrow \ln x=1\Leftrightarrow x=e$.

Δ4. Είναι $f(1)=2^1-\frac{1}{2^1}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, $f(2)=2^2-\frac{1}{2^2}=4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$, τότε

$$\etaμθ = \frac{\frac{3}{2}\ln^2 x - 2\cdot\frac{15}{4}\ln x}{6\cdot\frac{3}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\etaμθ = \frac{\frac{3}{2}\ln^2 x - \frac{15}{2}\ln x}{9} \Leftrightarrow \etaμθ = \frac{\frac{3}{2}(\ln^2 x - 5\ln x)}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \etaμθ = \frac{\ln^2 x - 5\ln x}{6}.$$

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ ισχύει $-1 \le \etaμθ \le 1$, οπότε $-1 \le \frac{\ln^2 x - 5\ln x}{6} \le 1 \Leftrightarrow -6 \le \ln^2 x - 5\ln x \le 6$ με $x > 0$ και έχουμε τις ανισώσεις:

$\ln^2 x - 5\ln x \ge -6$ (1) και $\ln^2 x - 5\ln x \le 6$ (2)

(1): $\ln^2 x - 5\ln x + 6 \ge 0$, θέτουμε $\ln x = \omega$, οπότε $\omega^2 - 5\omega + 6 \ge 0$ Οι ρίζες του τριωνύμου $\omega^2 - 5\omega + 6$ είναι οι $\omega = 2$, $\omega = 3$

ω	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$\omega^2 - 5\omega + 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Η ανίσωση $\omega^2 - 5\omega + 6 \ge 0$ αληθεύει όταν $\omega \le 2$ ή $\omega \ge 3$, οπότε $\ln x \le 2$ ή $\ln x \ge 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln x \le \ln e^2$ ή $\ln x \ge \ln e^3 \Leftrightarrow x \le e^2$ ή $x \ge e^3$ και αφού πρέπει $x > 0$ τότε $x \in (0, e^2] \cup [e^3, +\infty)$.

(2): $\ln^2 x - 5\ln x - 6 \le 0$, θέτουμε $\ln x = \varphi$, οπότε $\varphi^2 - 5\varphi - 6 \le 0$. Οι ρίζες του τριωνύμου $\varphi^2 - 5\varphi - 6$ είναι οι $\varphi = -1$, $\varphi = 6$

φ	$-\infty$		-1		6		$+\infty$
$\varphi^2 - 5\varphi - 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Η ανίσωση $\varphi^2 - 5\varphi - 6 \le 0$ αληθεύει όταν $-1 \le \varphi \le 6$, οπότε $-1 \le \ln x \le 6 \Leftrightarrow$

$$\ln e^{-1} \le \ln x \le \ln e^6 \Leftrightarrow \frac{1}{e} \le x \le e^6 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{e}, e^6\right]$$

Οι ανισώσεις (1) και (2) συναληθεύουν όταν $x \in \left[\frac{1}{e}, e^2\right] \cup [e^3, e^6]$.