

ΤΑΞΗ: Α' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Κυριακή 17 Απριλίου 2016
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία. (Σχολικό βιβλίο, σελίδα 62).

A2. $\alpha \rightarrow$ Λάθος $\beta \rightarrow$ Σωστό $\gamma \rightarrow$ Λάθος $\delta \rightarrow$ Σωστό $\epsilon \rightarrow$ Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. i. Έχουμε $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25 > 0$, άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες: $x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2}$, άρα $x_1 = -2$, $x_2 = 3$

ii. Ισχύει $(x-1)^2 = |x-1|^2$. Θέτουμε $|x-1| = y$ με $y \geq 0$ οπότε έχουμε την εξίσωση $y^2 - y - 6 = 0$ με $y \geq 0$. Επομένως (από i) είναι $y = -2$ που απορρίπτεται ή $y = 3$ που είναι δεκτή.
Άρα $|x-1| = 3 \Leftrightarrow (x-1=3 \text{ ή } x-1=-3) \Leftrightarrow x = 4 \text{ ή } x = -2$

B2. i. Λύνουμε την εξίσωση $-x^2 + x + 6 = 0$ η οποία είναι ισοδύναμη με την (i) του ερωτήματός B1. Άρα $x_1 = -2$, $x_2 = 3$.

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
$-x^2 + x + 6$	-	0	+	0	-

Επομένως οι λύσεις της ανίσωσης $-x^2 + x + 6 < 0$ είναι τα $x \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$

ii. Για να είναι η εξίσωση $x^2 + 2x + \frac{\lambda^2}{4} = 0$ αδύνατη στο \mathbb{R} θα πρέπει η

διακρίνουσά της να είναι αρνητική. Δηλαδή $\Delta < 0 \Leftrightarrow 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{\lambda^2}{4} < 0 \Leftrightarrow$

$$4 - 4 \cdot \frac{\lambda^2}{4} < 0 \Leftrightarrow 4 - \lambda^2 < 0 \Leftrightarrow \lambda^2 > 4 \Leftrightarrow |\lambda| > 2 \Leftrightarrow \lambda > 2 \text{ ή } \lambda < -2$$

Οι παραπάνω λύσεις προκύπτουν και από τον κανόνα προσήμου τριωνύμου: Ζητάμε τις τιμές του λ για τις οποίες είναι $4 - \lambda^2 < 0$. Δηλαδή τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο του πρώτου μέλους είναι ομόσημο του συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου. Σύμφωνα με τον κανόνα προσήμου τριωνύμου, πρέπει ο λ να βρίσκεται εκτός του διαστήματος των ριζών του τριωνύμου $4 - \lambda^2$, οι οποίες είναι -2 και 2 . Έτσι τελικά πρέπει $\lambda > 2$ ή $\lambda < -2$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για να ορίζεται η f πρέπει

$$3 - |1 - x| \geq 0 \Leftrightarrow |1 - x| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq 1 - x \leq 3 \Leftrightarrow -4 \leq -x \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4.$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = [-2, 4]$.

Γ2. Για να ανήκει το σημείο $M(-1, 1)$ στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f πρέπει οι συντεταγμένες του να επαληθεύουν τον τύπο της. Δηλαδή πρέπει

$$\begin{aligned} f(-1) = 1 &\Leftrightarrow \sqrt{3 - |1 - (-1)|} + |\kappa^3 + 1| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{3 - 2} + |\kappa^3 + 1| = 1 \Leftrightarrow \\ 1 + |\kappa^3 + 1| &= 1 \Leftrightarrow |\kappa^3 + 1| = 0 \Leftrightarrow \kappa^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow \kappa^3 = -1 \Leftrightarrow \kappa = -\sqrt[3]{-1} \Leftrightarrow \kappa = -1. \end{aligned}$$

Γ3. Από τη φράση "παίρνουμε τυχαία ένα στοιχείο ω του Ω " συμπεραίνουμε ότι όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα. Επομένως ισχύει ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας. Το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων είναι το πλήθος των στοιχείων του Ω , δηλαδή $N(\Omega) = 10$. Αν θεωρήσουμε E το ενδεχόμενο «το $f(\omega)$ έχει γόημα» τότε το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων είναι $N(E)$. Από τους αριθμούς που βρίσκονται στο Ω παρατηρούμε ότι μόνο οι αριθμοί $1, 2, 3, 4$ βρίσκονται στο πεδίο ορισμού της f που είναι το $A = [-2, 4]$ όπως γνωρίζουμε από το Γ1. Άρα $E = \{1, 2, 3, 4\}$ με $N(E) = 4$. Έτσι έχουμε τελικά σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας

$$P(E) = \frac{N(E)}{N(\Omega)} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε την εξίσωση $x^2 - 4x + 2 = 0$. Η διακρίνουσα είναι

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 16 - 8 = 8. \text{ Αφού } \Delta > 0, \text{ η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες.}$$

Δ2. Αρχικά έχουμε

$$f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 2 = 2 \text{ και } f(-1) = (-1)^2 - 4(-1) + 2 = 1 + 4 + 2 = 7$$

Άρα

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7-2}-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{7-2}}{\sqrt{7-2}+\sqrt{2}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{2}) + \sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})} = \\ &= \frac{\sqrt{10} + \sqrt{4} + \sqrt{25} - \sqrt{10}}{\sqrt{5^2 - \sqrt{2}^2}} = \frac{2+5-7}{5-2} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

• Από τους τύπους Vieta έχουμε $S = x_1 + x_2 = -\frac{-4}{1} = 4$ και

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{1} = 2$$

Έτσι είναι $B = x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 = x_1 \cdot x_2 (x_1^2 + x_2^2)$. Όμως από την ταυτότητα

$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 \text{ προκύπτει } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2. \text{ Έτσι}$$

$$B = x_1 \cdot x_2 \cdot [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2] = P(S^2 - 2P) \text{ ή}$$

$$B = 2(4^2 - 2 \cdot 2) = 2(16 - 4) = 2 \cdot 12 = 24$$

• Επίσης είναι, $\Gamma = \sqrt{x_1^2 \cdot x_2^2} = |x_1| \cdot |x_2| = |x_1 x_2| = |P| = |2| = 2$.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
 Β' ΦΑΣΗ

Ε_3.Μλ1Α(α)

Δ3. i. Για $A = \frac{7}{3}$, $B=24$ και $\Gamma=2$ είναι

$$(\varepsilon): y = 2x + \frac{24-10}{\frac{7}{3}} \quad \text{ή} \quad y = 2x + \frac{14 \cdot 3}{7} \quad \text{ή} \quad y = 2x + 6.$$

Για $x=0$ είναι $y=6$. Για $y=0$ είναι $x=-3$. Επομένως χαράζουμε την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(0,6)$ και $B(-3,0)$.

ii. Το τρίγωνο BOA είναι ορθογώνιο με μήκη κάθετων πλευρών

$$|OA| = |6| = 6$$

μονάδες και

$$|OB| = |-3| = 3$$

μονάδες.

Επομένως θα έχει εμβαδόν

$$(BOA) = \frac{1}{2} |OB| \cdot |OA| = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 = 9$$

τετραγωνικές μονάδες.

