

**ΤΑΞΗ:** Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ:** ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**Ημερομηνία:** Τετάρτη 19 Απριλίου 2017  
**Διάρκεια Εξέτασης:** 3 ώρες

**ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ .  
Αν  $F$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ .
- Να αποδείξετε ότι: όλες οι συναρτήσεις της μορφής  $G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$  είναι παράγουσες της  $f$  στο  $\Delta$
  - Να αποδείξετε ότι: κάθε άλλη παράγουσα  $G$  της  $f$  στο  $\Delta$  παίρνει τη μορφή  $G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$

**Μονάδες 8**

- A2.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  λέμε ότι παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  τοπικό ελάχιστο;

**Μονάδες 4**

- A3.** Πότε μια συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται συνάρτηση 1-1.

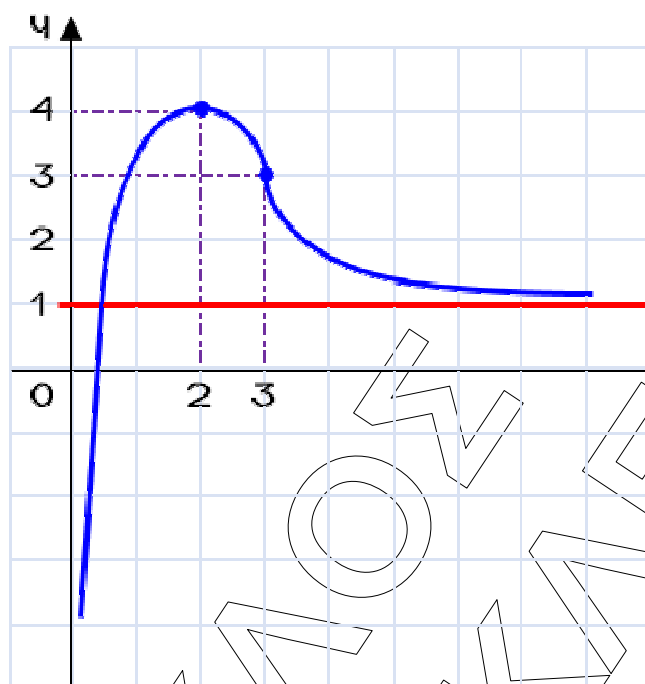
**Μονάδες 3**

- A4** Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ .

Με βάση το σχήμα να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017  
Β' ΦΑΣΗ

E\_3.Μλ3ΘΟ(ε)



- (α) Για  $x = 2$  η  $f$  παρουσιάζει μέγιστο το  $f(2) = 4$   
 (β) Η ευθεία  $y = 1$  είναι οριζόντια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$   
 (γ) Η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(0, 2]$   
 (δ) Η εξίσωση  $f(x) = \lambda$  έχει το πολύ δύο ρίζες για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$   
 (ε) Ισχύει ότι:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(f(x)) - 1] = -\infty$

Μονάδες 10

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x - 1$  με  $A_f = \mathbb{R}$

**B1.** Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και ότι η αντίστροφη της  $f$  είναι η συνάρτηση  $f^{-1}(x) = \ln(x+1), x > -1$

Μονάδες 6

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017**  
Β' ΦΑΣΗ

**E\_3.ΜΛ3ΘΟ(ε)**

**B2.** Να μελετήσετε τις συναρτήσεις  $f$  και  $f^{-1}$  ως προς την κυρτότητα και να αποδείξετε ότι ο άξονας συμμετρίας των  $C_f, C_{f^{-1}}$  είναι η κοινή τους εφαπτομένη στο  $O(0,0)$

**Μονάδες 8**

**B3. (i)** Να αποδείξετε ότι:  $f(x) \geq f^{-1}(x)$  για κάθε  $x > -1$

**(ii)** Να λύσετε την εξίσωση:  $f(x) + f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x) + \eta\mu x$  στο  $(0, +\infty)$

**Μονάδες 6**

**B4.** Αν  $G$  μια παράγουσα της συνάρτησης  $g(x) = f(x) + f^{-1}(x), x > 0$  να δείξετε ότι για  $0 < \alpha < \beta$  ισχύει:  $(\beta - \alpha) \cdot g(\alpha) < G(\beta) - G(\alpha) < (\beta - \alpha) \cdot g(\beta)$

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f'(x) = k - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}$ ,  $k \in \mathbb{R}$  για κάθε  $x > 0$  η οποία παρουσιάζει ακρότατο στο  $x_0 = 2$  με τιμή  $1 - \ln 2$

**Γ1.** Δείξτε ότι  $k = 1$  και ότι ο τύπος της  $f$  είναι  $f(x) = x + \frac{2}{x} - \ln x - 2$

**Μονάδες 4**

**Γ2. (i)** Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$

**Μονάδες 4**

**(ii)** Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$$x^2 + 2 = x(\alpha + \ln x + 2) \text{ με } x > 0$$

για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού  $\alpha$ .

**Μονάδες 3**

**Γ3. (i)** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι κυρτή στο πεδίο ορισμού της και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $M(1, f(1))$

**Μονάδες 3**

**(ii)** Να λύσετε την ανίσωση  $e^{3x^2 - 5x + 2} > x^x$  για κάθε  $x > 0$

**Μονάδες 5**

**Γ4.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = f(x) + \ln x + 2$  την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $g$  στο  $+\infty$  και τις ευθείες  $x = 1$  και  $x = e$

**Μονάδες 6**

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017**  
**Β' ΦΑΣΗ**

**E\_3.Μλ3ΘΟ(ε)**

**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη στο  $A = (0, +\infty)$  με συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποία ισχύουν:

- $f'(1) \neq -1$  και  $f(1) = 1$
- $f(f^2(x)) + f^2(x) = f(x) + x$  για κάθε  $x > 0$

**Δ1.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $A$ .

**Μονάδες 8**

**Δ2.** Να δείξετε ότι για την συνάρτηση  $g$  με

$$g(x) = \begin{cases} \left( \int_1^2 f(t) dt \right) \cdot x^3, & x \geq 0 \\ \left( \int_{-2}^{-1} f(t-1) dt \right) \cdot x^2, & x < 0 \end{cases}$$

ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα  $\Delta = [-1, 1]$

**Μονάδες 8**

Επιπλέον θεωρούμε τη συνάρτηση  $h(x) = f(x^2 + 1)$ , με  $x > 0$

**Δ3.** Να δείξετε ότι:  $\int_{-2}^{-1} h(x) dx > \int_1^2 h(x) dx$

**Μονάδες 5**

**Δ4.** Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\left( \int_2^3 h(t) \cdot \int_2^3 h(u) du \right) dt \cdot (x-2) + f(x) \left( \int_1^2 h(t) dt \right)^2 = 0$$

έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα  $(1, 2)$

**Μονάδες 4**