ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Παρασκευή 5 Ιανουαρίου 2018
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 43

Α2. Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ με $x_1 \neq x_2$ είναι $\lambda = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Α3. **(α) ΣΩΣΤΟ (β) ΣΩΣΤΟ (γ) ΛΑΘΟΣ (δ) ΛΑΘΟΣ (ε) ΣΩΣΤΟ**

ΘΕΜΑ Β

Β1. Τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{u}, \vec{v}$ είναι αντίστοιχα

$$|\vec{u}| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + \kappa^2} \Leftrightarrow |\vec{u}| = \sqrt{3 + \kappa^2}$$

και

$$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} \Leftrightarrow |\vec{u}| = \sqrt{12} \Leftrightarrow |\vec{u}| = 2\sqrt{3}$$

Εφόσον έχουν ίσα μέτρα θα ισχύει $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ επομένως

$$\sqrt{3 + \kappa^2} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow 3 + \kappa^2 = 12 \Leftrightarrow \kappa^2 = 9 \overset{\kappa>0}{\Leftrightarrow} \kappa = 3$$

Β2. Για $\kappa = 3$ έχουμε $\vec{u} = \left(\sqrt{3}, 3\right)$ ενώ $\vec{v} = \left(3, -\sqrt{3}\right)$

Το εσωτερικό τους γινόμενο είναι:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(\sqrt{3}, 3\right) \cdot \left(3, -\sqrt{3}\right) = 3 \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot \sqrt{3} = 0$$

Επομένως τα διανύσματα είναι κάθετα.

Β3. Το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} + \vec{v}$ μπορεί να βρεθεί με δύο τρόπους

Α-τρόπος

$$\left|\vec{u} + \vec{v}\right|^2 = \left(\vec{u} + \vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \left|\vec{u}\right|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \left|\vec{v}\right|^2 \underset{|\vec{u}|=|\vec{v}|}{\overset{\vec{u}\cdot\vec{v}=0}{=}} 2\left|\vec{v}\right|^2 = 2\left(\sqrt{12}\right)^2 = 24$$

Άρα $\left|\vec{u} + \vec{v}\right| = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

Β-τρόπος

Βρίσκουμε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} + \vec{v}$

$$\vec{u} + \vec{v} = \left(\sqrt{3}, 3\right) + \left(3, -\sqrt{3}\right) = \left(\sqrt{3} + 3, 3 - \sqrt{3}\right)$$

$$\left|\vec{u} + \vec{v}\right| = \sqrt{\left(3 + \sqrt{3}\right)^2 + \left(3 - \sqrt{3}\right)2} = \sqrt{3 + 6\sqrt{3} + 3 + 9 - 6\sqrt{3} + 3} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

Β4. $$\sigma\upsilon\nu\left(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}\right) = \frac{\left(\vec{u} + \vec{v}\right) \cdot \vec{u}}{\left|\vec{u} + \vec{v}\right| \cdot \left|\vec{v}\right|} = \frac{\vec{u}^2 + \vec{v} \cdot \vec{u}}{\left|\vec{u} + \vec{v}\right| \cdot \left|\vec{v}\right|} = \frac{\left|\vec{u}\right|^2 + \vec{v} \cdot \vec{u}}{\left|\vec{u} + \vec{v}\right| \cdot \left|\vec{v}\right|} = \frac{12}{2\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Επομένως η γωνία των διανυσμάτων είναι 45° ή $\frac{\pi}{4}\text{rad}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AB είναι:

$$\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-1}{2-1} = 2$$

Επομένως η εξίσωση της ευθείας AB είναι:

$$\varepsilon_{AB}: y - 1 = 2(x-1) \Leftrightarrow y = 2x - 1$$

Γ2.

(i) Οι συντεταγμένες του μέσου M της πλευράς $ΑΓ$ του τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι

$$x_M = \frac{x_A + x_\Gamma}{2} = \frac{1+5}{2} = 3 \text{ και } y_M = \frac{y_A + y_\Gamma}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$$

Επομένως $M(3,2)$.

(ii) Η μεσοκάθετος ευθεία (ε) της πλευράς $ΑΓ$ διέρχεται από το μέσο M και τέμνει την $ΑΓ$ κάθετα επομένως $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{A\Gamma} = -1$

$$\lambda_{A\Gamma} = \frac{y_\Gamma - y_A}{x_\Gamma - x_A} = \frac{3-1}{5-1} = \frac{1}{2}$$

$$\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{A\Gamma} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = -2$$

Άρα η (ε) διέρχεται από το $M(3,2)$ και έχει κλίση $\lambda_\varepsilon = -2$ επομένως έχει εξίσωση $y - 2 = -2(x-3) \Leftrightarrow y - 2 = -2x + 6 \Leftrightarrow y = -2x + 8$

Γ3. Έστω $\Delta(x,y)$ εφόσον $ΑΒΓΔ$ παραλληλόγραμμο θα ισχύει:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (2-1, 3-1) = (1,2)$$

$$\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (x_\Gamma - x_\Delta, y_\Gamma - y_\Delta) = (5-x, 3-y)$$

Άρα

$$\begin{cases} 5 - x = 1 \\ 3 - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \text{ οπότε } \Delta(4,1)$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

(α) Η $(\varepsilon)\ y=|\vec{\alpha}|x+|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,2)$ επομένως

$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=2$ και τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B\left(-\dfrac{|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}|},0\right)$ ή $B\left(-\dfrac{2}{|\vec{\alpha}|},0\right)$ το οποίο

προκύπτει θέτοντας $y=0$ στην εξίσωση της(ε).

Εφόσον το τρίγωνο είναι ισοσκελές ισχύει:

$$(OA)=(OB)\Leftrightarrow |y_A|=|x_B|\Leftrightarrow 2=\frac{2}{|\vec{\alpha}|}\Leftrightarrow |\vec{\alpha}|=1$$

Β-τρόπος

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε) είναι θετικός επομένως η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ είναι οξεία και επειδή το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές θα είναι η γωνία 45° επομένως $\lambda_\varepsilon=\varepsilon\varphi 45^\circ \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|=1$

(β) Εφόσον $\vec{\beta}=\left(1,|\vec{\beta}|-1\right)$ τότε

$$|\vec{\beta}|=\sqrt{1^2+\left(|\vec{\beta}|-1\right)^2}\Leftrightarrow |\vec{\beta}|=\sqrt{1+|\vec{\beta}|^2-2|\vec{\beta}|+1}\Leftrightarrow |\vec{\beta}|^2=2+|\vec{\beta}|^2-2|\vec{\beta}|\Leftrightarrow |\vec{\beta}|=1$$

Δ2. Από τη σχέση $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=2$ έχουμε διαδοχικά:

$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2=2^2\Leftrightarrow \left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2=4\Leftrightarrow \vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=4\Leftrightarrow 1+2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)+1=4$$

$$\Leftrightarrow 2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=2\Leftrightarrow |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=1\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=1$$

Άρα $\left(\vec{\alpha},\widehat{\vec{\beta}}\right)=0^\circ$ δηλαδή τα διανύσματα είναι ομόρροπα και επειδή έχουν ίσα μέτρα θα είναι ίσα.

Δ3. Για τις εξισώσεις των ευθείων $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ έχουμε:

$$\varepsilon_1 : y = 2x - \lambda + 2 \Leftrightarrow 2x - y = \lambda - 2$$

$$\varepsilon_2 : y = \lambda x - \lambda^2 + \lambda + 2 \Leftrightarrow \lambda x - y = \lambda^2 - \lambda - 2$$

Θα λύσουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 2x - y = \lambda - 2 \\ \lambda x - y = \lambda^2 - \lambda - 2 \end{cases} \text{ με τη μέθοδο των οριζουσών}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + \lambda = \lambda - 2 \neq 0 \ \textbf{(από υπόθεση)}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ \lambda^2 - \lambda - 2 & -1 \end{vmatrix} = -\lambda + 2 + \lambda^2 - \lambda - 2 = \lambda(\lambda - 2)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & \lambda - 2 \\ \lambda & \lambda^2 - \lambda - 2 \end{vmatrix} = 2\lambda^2 - 2\lambda - 4 - \lambda^2 + 2\lambda = \lambda^2 - 4 = (\lambda - 2)(\lambda + 2)$$

Εφόσον $D \neq 0$ το σύστημα έχει μοναδική λύση, δηλαδή οι ευθείες τέμνονται.

Άρα $x = \dfrac{D_x}{D} \Leftrightarrow x = \lambda$ και $y = \dfrac{D_y}{D} \Leftrightarrow y = \lambda + 2$

Επομένως το κοινό τους σημείο είναι $M(\lambda, \lambda + 2)$.

Η ευθεία (ε) έχει εξίσωση $y = x + 2$ που προφανώς το σημείο Μ ανήκει σε αυτήν για κάθε $\lambda \neq 2$.

<u>Β τρόπος</u>

$\varepsilon_1 : y = 2x - \lambda + 2 \Leftrightarrow 2x - y = \lambda - 2$

$\varepsilon_2 : y = \lambda x - \lambda^2 + \lambda + 2 \Leftrightarrow \lambda x - y = \lambda^2 - \lambda - 2$

Θα λύσουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 2x - y = \lambda - 2 \\ \lambda x - y = \lambda^2 - \lambda - 2 \end{cases} \text{ με τη μέθοδο των οριζουσών}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + \lambda = \lambda - 2 \neq 0 \ \textbf{(από υπόθεση)}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ \lambda^2 - \lambda - 2 & -1 \end{vmatrix} = -\lambda + 2 + \lambda^2 - \lambda - 2 = \lambda(\lambda - 2)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & \lambda - 2 \\ \lambda & \lambda^2 - \lambda - 2 \end{vmatrix} = 2\lambda^2 - 2\lambda - 4 - \lambda^2 + 2\lambda = \lambda^2 - 4 = (\lambda - 2)(\lambda + 2)$$

Εφόσον $D \neq 0$ το σύστημα έχει μοναδική λύση, δηλαδή οι ευθείες τέμνονται.

Άρα $x = \frac{D_x}{D} \Leftrightarrow x = \lambda$ και $y = \frac{D_y}{D} \Leftrightarrow y = \lambda + 2$

Επομένως το κοινό τους σημείο είναι $M(\lambda, \lambda + 2)$

Η ευθεία (ε) έχει εξίσωση $y = x + 2$ που προφανώς το σημείο Μ ανήκει σε αυτήν για κάθε $\lambda \neq 2$