

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 7 Ιανουαρίου 2017

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 106
- A2. Ορισμός σχολικού βιβλίου σελίδα 95
- A3. Ορισμός σχολικού βιβλίου σελίδα 33
- A5. (i) Σωστό (ii) Λάθος (iii) Λάθος (iv) Λάθος (v) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε

$$x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Rightarrow 2e^{x_1} < 2e^{x_2} \Rightarrow 2e^{x_1} + 1 < 2e^{x_2} + 1 \Rightarrow \frac{1}{2e^{x_1} + 1} > \frac{1}{2e^{x_2} + 1}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2e^{x_1} + 1} < -\frac{1}{2e^{x_2} + 1} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2e^{x_1} + 1} < 1 - \frac{1}{2e^{x_2} + 1} \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$$

Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Η g συνεχής στο $A_g = \mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και γνησίως αύξουσα.

Επομένως το σύνολο τιμών της είναι :

$$g(A_g) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right) = (-1, 1)$$

Διότι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{2}{2e^x + 1} \right) = 1 - \frac{2}{2 \cdot 0 + 1} = -1$$

Εφόσον $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Α΄ ΦΑΣΗ

E_3.Μλ3ΘΟ(α)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{2e^x + 1} \right) = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{1}{e^x} \frac{1}{\left(2 + \frac{1}{e^x} \right)} = 1 - 2 \cdot 0 \frac{1}{2+0} = 1$$

Εφόσον $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

B2. Εφόσον η g είναι γνησίως αύξουσα είναι και 1-1 επομένως αντιστρέφεται. Το πεδίο ορισμού της g^{-1} είναι το σύνολο τιμών της g , δηλαδή

$$A_{g^{-1}} = (-1, 1)$$

Για την εύρεση της αντίστροφης έχουμε

$$g(x) = y \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{2e^x + 1} = y \Leftrightarrow 1 - y = \frac{2}{2e^x + 1} \Leftrightarrow (1-y)(2e^x + 1) = 2$$

$$\Leftrightarrow 2e^x + 1 - 2e^x y - y = 2 \Leftrightarrow e^x (2 - 2y) = y + 1$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{y+1}{2-2y} \Leftrightarrow x = \ln \left(\frac{y+1}{2-2y} \right)$$

Επομένως $g^{-1}(x) = \ln \left(\frac{x+1}{2-2x} \right)$ με $x \in (-1, 1)$

B3. Για να ορίζεται η $f \circ f$ πρέπει

$$x \in A_f \text{ και } f(x) \in A_f$$

Δηλαδή

$$x \neq 2$$

και

$$\frac{2x+6}{x-2} \neq 2 \Leftrightarrow 2x+6 \neq 2x-4 \Leftrightarrow 0x \neq -10, \text{ ισχύει για κάθε } x \neq 2$$

Επομένως $A_{f \circ f} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

Και ο τύπος της είναι:

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{2f(x)+6}{f(x)-2} = \frac{2 \frac{2x+6}{x-2} + 6}{\frac{2x+6}{x-2} - 2} = \frac{4x+12+6x-12}{\frac{2x+6-2x+4}{x-2}} = \frac{10x}{10} = x$$

B4. Η g συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και γνησίως αύξουσα επομένως :

$$g([\alpha, \beta]) = [g(\alpha), g(\beta)]$$

Άρα ισχύει:

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Α' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ3ΘΟ(α)

$$\alpha < x_1 < \beta \Leftrightarrow g(\alpha) < g(x_1) < g(\beta)$$

$$\alpha < x_2 < \beta \Leftrightarrow g(\alpha) < g(x_2) < g(\beta)$$

$$\alpha < x_3 < \beta \Leftrightarrow g(\alpha) < g(x_3) < g(\beta)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει :

$$3g(\alpha) < g(x_1) + g(x_2) + g(x_3) < 3g(\beta) \Leftrightarrow g(\alpha) < \frac{g(x_1) + g(x_2) + g(x_3)}{3} < g(\beta)$$

Ο αριθμός $\frac{g(x_1) + g(x_2) + g(x_3)}{3}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της g άρα υπάρχει

$x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο

$$g(x_0) = \frac{g(x_1) + g(x_2) + g(x_3)}{3}$$

Το x_0 μοναδικό διότι η g είναι γνησίως αύξουσα

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $f^2(2) - 25 \neq 0 \Leftrightarrow f^2(2) \neq 25 \Leftrightarrow \begin{cases} f(2) \neq 5 \\ f(2) \neq -5 \end{cases}$ και τότε το όριο γίνεται :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f^2(2) - 25)x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f^2(2) - 25) \cdot x$$

$$= (f^2(2) - 25) \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty, & f(2) \in (-\infty, -5) \cup (5, +\infty) \\ \text{ή} \\ -\infty, & f(2) \in (-5, 5) \end{cases}$$

Σε κάθε περίπτωση είναι άτοπο διότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f^2(2) - 25)x^3 + f(2)x^2 - 3x + 9}{x^2 + 2x - 6} = 5$$

- Αν $f^2(2) - 25 = 0 \Leftrightarrow f^2(2) = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} f(2) = 5 \\ \text{ή} \\ f(2) = -5 \end{cases}$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Α' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ3ΘΟ(α)

- Αν $f(2) = 5$ το όριο γίνεται :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 3x + 9}{x^2 + 2x - 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2}{x^2} = 5$$

- Αν $f(2) = -5$ το όριο γίνεται :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x^2 - 3x + 9}{x^2 + 2x - 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x^2}{x^2} = -5$$

Επομένως $f(2) = 5$

Για το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h) - 5}{h} = 9 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h) - f(2)}{h} = 9$ (1)

A τρόπος

θέτουμε $u = 2 + 3h \Leftrightarrow h = \frac{u-2}{3}$ άρα $u_0 = \lim_{h \rightarrow 0} (2+3h) \Leftrightarrow u_0 = 2$

Επομένως η (1) γίνεται

$$\lim_{u \rightarrow 2} \frac{f(u) - f(2)}{\frac{u-2}{3}} = 9 \Leftrightarrow 3 \lim_{u \rightarrow 2} \frac{f(u) - f(2)}{u-2} = 9$$

$$\Leftrightarrow \lim_{u \rightarrow 2} \frac{f(u) - f(2)}{u-2} = 3 \Leftrightarrow f'(2) = 3$$

B τρόπος

θέτουμε $u = 3h \Leftrightarrow h = \frac{u}{3}$ άρα $u_0 = \lim_{h \rightarrow 0} 3h \Leftrightarrow u_0 = 0$

Επομένως η (1) γίνεται

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(2+u) - f(2)}{\frac{u}{3}} = 9 \Leftrightarrow 3 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(2+u) - f(2)}{u} = 9$$

$$\Leftrightarrow \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(2+u) - f(2)}{u} = 3 \Leftrightarrow f'(2) = 3$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Α΄ ΦΑΣΗ

E_3.Μλ3ΘΟ(α)

Γ2. Για $x = 2$ η σχέση $(x - 2) \cdot f(x) = \kappa x^2 + \lambda x + 2$

Γίνεται:

$$0 = 4\kappa + 2\lambda + 2 \Leftrightarrow \lambda = -2\kappa - 1 \quad (2)$$

Για $x \neq 2$ έχουμε

$$f(x) = \frac{\kappa x^2 + \lambda x + 2}{x - 2} \quad (3)$$

Και επειδή η f συνεχής στο \mathbb{R} άρα και στο $x_0 = 2$ οπότε θα ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\kappa x^2 + \lambda x + 2}{x - 2} = 5$$

Αντικαθιστώντας την (2) στην (3) παίρνουμε :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\kappa x^2 + (-2\kappa - 1)x + 2}{x - 2} = 5 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2) \cdot (\kappa x - 1)}{x - 2} = 5 \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} (\kappa x - 1) = 5 &\Leftrightarrow 2\kappa - 1 = 5 \Leftrightarrow \kappa = 3 \end{aligned}$$

Επομένως για $\kappa = 3$ έχουμε από (2) ότι: $\lambda = -7$

Γ3. (i) Για $\kappa = 3$ και $\lambda = -7$ έχουμε

$$\begin{aligned} (x - 2) \cdot f(x) = 3x^2 - 7x + 2 &\Leftrightarrow f(x) = \frac{3x^2 - 7x + 2}{x - 2} \\ \Leftrightarrow f(x) = \frac{(x - 2)(3x - 1)}{x - 2} &\Leftrightarrow f(x) = 3x - 1 \end{aligned}$$

Επομένως $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x \neq 2 \\ 5, & x = 2 \end{cases}$ και επειδή η f συνεχής στο $x = 2$ άρα ο τύπος της f είναι :

$$f(x) = 3x - 1, x \in \mathbb{R}$$

(ii) Έστω $A(x_0, g(x_0))$ σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με $x_0 \in (-1, +\infty)$

Η εξίσωση εφαπτομένης της C_g στο A είναι:

$$y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = g'(x_0) \cdot x + g(x_0) - x_0 \cdot g'(x_0)$$

Για να είναι η γραφική παράσταση της f με $f(x) = 3x - 1$ εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g πρέπει το σύστημα

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Α' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ3ΘΟ(α)

$$\begin{cases} g'(x_0) = 3 \\ \text{και} \quad \text{να έχει λύση.} \\ g(x_0) - x_0 \cdot g'(x_0) = -1 \end{cases}$$

Η g παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$ με $g'(x) = \frac{1}{x+1} + 2$

Επομένως

$$g'(x_0) = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{x_0+1} + 2 = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{x_0+1} = 1 \Leftrightarrow x_0+1=1 \Leftrightarrow x_0=0$$

Για $x_0 = 0$ η εξίσωση $g(x_0) - x_0 \cdot g'(x_0) = -1$ επαληθεύεται διότι

$$g(0) - 0 \cdot g'(0) = -1 \Leftrightarrow \ln 1 + 2 \cdot 0 - 1 = -1 \Leftrightarrow 1 - 1 = -1$$

Άρα η $f(x) = 3x - 1$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g στο σημείο $A(0, g(0))$ δηλαδή στο σημείο $A(0, -1)$

Γ4.

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow x+1 - e^{1-2x} = 0 \Leftrightarrow x+1 = e^{1-2x} \Leftrightarrow x+1 = \frac{e}{e^{2x}}$$

$$\Leftrightarrow e^{2x}(x+1) = e \Leftrightarrow \ln(e^{2x}(x+1)) = \ln e \Leftrightarrow \ln e^{2x} + \ln(x+1) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x + \ln(x+1) = 1 \Leftrightarrow 2x + \ln(x+1) - 1 = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$$

Επομένως οι εξισώσεις $h(x) = 0$ και $g(x) = 0$, $x \in (-1, +\infty)$ είναι ισοδύναμες δηλαδή έχουν τις ίδιες λύσεις.

Για κάθε $x_1, x_2 \in (-1, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \Rightarrow \ln(x_1 + 1) < \ln(x_2 + 1)$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \Rightarrow 2x_1 - 1 < 2x_2 - 1$$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει $g(x_1) < g(x_2)$ επομένως η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $A = (-1, +\infty)$

Η g συνεχής στο A και γνησίως αύξουσα επομένως το σύνολο τιμών της είναι

$$g(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right) = (-\infty, +\infty) \text{ διότι :}$$

- $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (\ln(x+1) + 2x - 1) = (-\infty) + (-3) = -\infty$

Για το $\lim_{x \rightarrow -1^-} \ln(x+1)$ θέτουμε $u = x+1$ επομένως όταν $u_0 = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x+1) = 0^+$

Επομένως $\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(x+1) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty$ ενώ $\lim_{x \rightarrow -1^+} (2x - 1) = -3$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x+1) + 2x - 1) = (+\infty) + (+\infty) = +\infty$

Ο αριθμός 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της g άρα υπάρχει $x_0 \in (-1, +\infty)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$ το οποίο είναι μοναδικό διότι η g είναι γνησίως αύξουσα, επομένως και $h(x_0) = 0$.

Επομένως η C_h τέμνει την C_g τέμνει τον άξονα $x'x$ σε μοναδικό σημείο $(x_0, 0)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \alpha \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \alpha$

Για $x > 0$ η σχέση $f^3(x) + xf^2(x) \leq 2\eta\mu^3x$ γίνεται:

$$\frac{f^3(x)}{x^3} + \frac{f^2(x)}{x^2} \leq \frac{2\eta\mu^3x}{x^3} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)^3 + \left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 \leq 2\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^3$$

Επομένως: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x)}{x}\right)^3 = \alpha^3$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 = \alpha^2$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^3 = 1^3 = 1$

Άρα: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3 + \left(\frac{f(x)}{x}\right)^2\right) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} 2\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^3 \Leftrightarrow \alpha^3 + \alpha^2 \leq 2 \Leftrightarrow \alpha^3 + \alpha^2 - 2 \leq 0 \quad (2)$

Η σχέση (2) γράφεται

$$(\alpha - 1)(\alpha^2 + 2\alpha + 2) \leq 0 \Leftrightarrow \alpha - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \alpha \leq 1$$

Για $x < 0$ η σχέση $f^3(x) + xf^2(x) \leq 2\eta\mu^3x$ γίνεται :

$$\frac{f^3(x)}{x^3} + \frac{f^2(x)}{x^2} \geq \frac{2\eta\mu^3x}{x^3} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)^3 + \left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 \geq 2\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^3$$

Επομένως: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{f(x)}{x}\right)^3 = \alpha^3$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 = \alpha^2$ και $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^3 = 1^3 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3 + \left(\frac{f(x)}{x}\right)^2\right) \geq \lim_{x \rightarrow 0^-} 2\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^3 \Leftrightarrow \alpha^3 + \alpha^2 \geq 2 \Rightarrow \alpha^3 + \alpha^2 - 2 \geq 0 \quad (3)$$

Η σχέση (3) γράφεται $(\alpha - 1)(\alpha^2 + 2\alpha + 2) \geq 0 \Leftrightarrow \alpha - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \geq 1$

Και επειδή το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \alpha$ και το όριο είναι μοναδικό τότε $\alpha = 1$.

Δ2. Για $\alpha = 1$ η σχέση $\alpha e^{g(x)} + \sqrt{g(x)} = x + \alpha$ γίνεται:

$$e^{g(x)} + \sqrt{g(x)} = x + 1, x \in (0, +\infty)$$

Α τρόπος

Έστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ ώστε $g(x_1) \geq g(x_2)$ τότε

$$e^{g(x_1)} \geq e^{g(x_2)} \text{ και } \sqrt{g(x_1)} \geq \sqrt{g(x_2)} \text{ επομένως}$$

$$e^{g(x_1)} + \sqrt{g(x_1)} \geq e^{g(x_2)} + \sqrt{g(x_2)} \Leftrightarrow x_1 + 1 \geq x_2 + 1 \Leftrightarrow x_1 \geq x_2 \text{ άτοπο.}$$

Άρα $g(x_1) < g(x_2)$ επομένως η g γνησίως αύξουσα

Β τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = e^x + \sqrt{x} - 1, x \in (0, +\infty)$

Για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \text{ (α)}$$

και

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \Rightarrow \sqrt{x_1} - 1 < \sqrt{x_2} - 1 \text{ (β)}$$

Με πρόσθεση των (α) και (β) προκύπτει $h(x_1) < h(x_2)$ επομένως η h γνησίως αύξουσα.

Το σύνολο τιμών της h είναι : $h((0, +\infty)) = (\lim_{x \rightarrow 0} h(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)) = (0, +\infty)$

$$e^{g(x)} + \sqrt{g(x)} - 1 = x \Leftrightarrow h(g(x)) = x, x \in (0, +\infty)$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow h(g(x_1)) < h(g(x_2)) \stackrel{h^{-1}}{\Rightarrow} g(x_1) < g(x_2)$$

Άρα η g γνησίως αύξουσα .

Εφόσον η g γνησίως αύξουσα είναι και 1-1 οπότε αντιστρέφεται

Θέτω $g(x) = y \Leftrightarrow x = g^{-1}(y), y > 0$ άρα :

$$e^{g(x)} + \sqrt{g(x)} = x + 1 \Leftrightarrow e^y + \sqrt{y} = g^{-1}(x) + 1 \Leftrightarrow e^y + \sqrt{y} - 1 = g^{-1}(y)$$

Επομένως η αντίστροφη της g είναι :

$$g^{-1}(x) = e^x + \sqrt{x} - 1, x > 0$$

Δ3. Η εξίσωση της εφαπτομένης της g στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = e$ είναι

$$y - g(e) = g'(e)(x - e) \text{ (A)}$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Α' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ3ΘΟ(α)

$g(e) = k \Leftrightarrow e = g^{-1}(k) \Leftrightarrow e = e^k + \sqrt{k} - 1 \Leftrightarrow k = 1$ προφανής ρίζα και επειδή η g^{-1} είναι 1-1 η ρίζα μοναδική.

Παραγωγίζοντας την $e^{g(x)} + \sqrt{g(x)} = x + 1$ έχουμε

$$e^{g(x)} g'(x) + \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} g'(x) = 1$$

Για $x = e$ γίνεται

$$e^{g(e)} g'(e) + \frac{1}{2\sqrt{g(e)}} g'(e) = 1 \Leftrightarrow eg'(e) + \frac{1}{2} g'(e) = 1 \Leftrightarrow 2eg'(e) + g'(e) = 2$$

$$\Leftrightarrow g'(e)(2e + 1) = 2 \Leftrightarrow g'(e) = \frac{2}{2e + 1}$$

Με αντικατάσταση στην (Α) όπου $g(e) = 1$ και $g'(e) = \frac{2}{2e + 1}$ προκύπτει :

$$y = \frac{2}{2e + 1} x + \frac{1}{2e + 1}$$

Δ4. Έστω $M(x_0, g^{-1}(x_0))$ σημείο της $C_{g^{-1}}$, η εξίσωση της εφαπτομένης στο M είναι

$$y - g^{-1}(x_0) = (g^{-1})'(x_0)(x - x_0)$$

Για να διέρχεται η εξίσωση από το σημείο $(1, 0)$ θα πρέπει να ισχύει

$$0 - g^{-1}(x_0) = (g^{-1})'(x_0)(1 - x_0) \text{ για κάποιο } x_0 \in (0, +\infty)$$

$$-e^{x_0} - \sqrt{x_0} + 1 = \left(e^{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \right) (1 - x_0)$$

$$\Leftrightarrow -e^{x_0} - \sqrt{x_0} + 1 = e^{x_0} - x_0 e^{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}} - \frac{x_0}{2\sqrt{x_0}}$$

$$\Leftrightarrow -2e^{x_0} + x_0 e^{x_0} + 1 - \sqrt{x_0} + \frac{\sqrt{x_0}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{x_0}(x_0 - 2) + 1 - \frac{\sqrt{x_0}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x_0} e^{x_0}(x_0 - 2) + 2\sqrt{x_0} - x_0 - 1 = 0$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Α΄ ΦΑΣΗ

E_3.Μλ3Θ0(α)

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x) = 2\sqrt{x}e^x(x-2) + 2\sqrt{x} - x - 1, x \in (0, +\infty)$$

Η φ συνεχής στο $[1, 4]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Επίσης

$$\varphi(1) = -2e < 0$$

και

$$\varphi(4) = 2\sqrt{4}e^4(4-2) + 2\sqrt{4} - 4 - 1 = 8e^4 - 1 > 0$$

Δηλαδή

$$\varphi(1) \cdot \varphi(4) < 0$$

Άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, 4) \subset (0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = 0$