ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΑΛΓΕΒΡΑ/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

Ημερομηνία: Σάββατο 13 Ιανουαρίου 2018
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ.60

Α2. Οι συντεταγμένες των σημείων είναι:

$$A(1,0),\ B(0,1),\ \Gamma(1,1),\ \Delta\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right),\ E\left(1,\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\ Z\left(\sqrt{3},1\right)$$

ΘΕΜΑ Β

Β1. Αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(2,-16)$ ισχύει ότι:

$$f(2)=-16 \Leftrightarrow 8-2\kappa=-16 \Leftrightarrow -2\kappa=-24 \Leftrightarrow \kappa=12$$

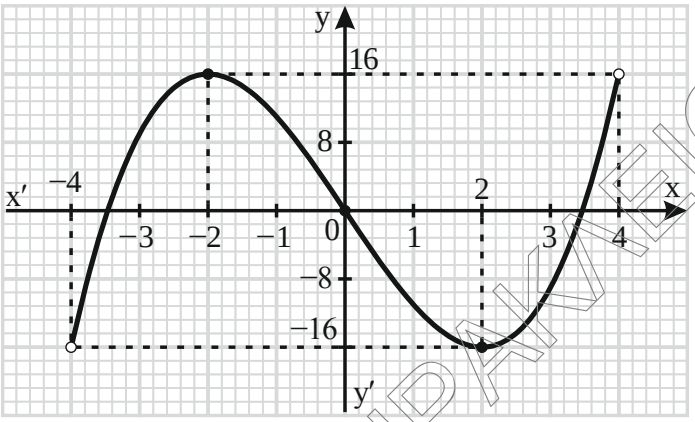
Άρα, $f(x)=x^3-12x,\ x\in(-4,4)$.

Β2. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x\in(-4,4)$, ισχύει $-x\in(-4,4)$.

Επίσης, $f(-x)=(-x)^3-12(-x)=-x^3+12x=-(x^3-12x)=-f(x)$, $x\in(-4,4)$

Επομένως, η f είναι περιττή.

Β3. Αφού η f είναι περιττή στο $(-4,4)$ τότε η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων. Οπότε, η γραφική παράσταση της f δίνεται στο παρακάτω σχήμα:

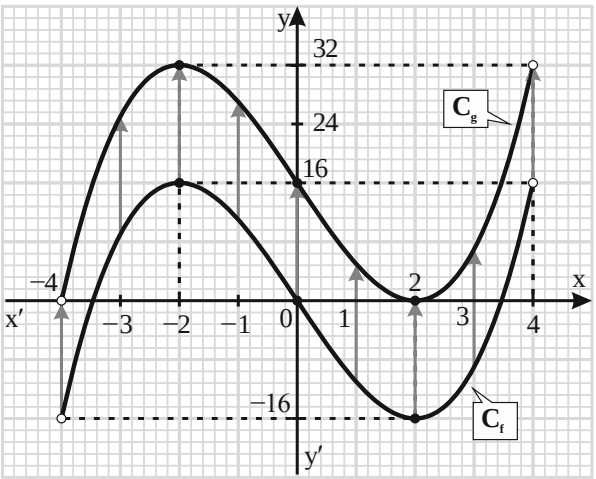


Β4. Από τη γραφική παράσταση της f προκύπτει ότι:

Η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-4,-2]$ και $[2,4)$. Επίσης, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-2,2]$.

Τέλος, η f παρουσιάζει μέγιστο στη θέση $x_1=-2$ το $f(-2)=16$ και ελάχιστο στη θέση $x_2=2$ το $f(2)=-16$.

Β5. Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f(x)=x^3-12x$ κατά 16 μονάδες προς τα πάνω. Το γράφημα της g δίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω ότι υπάρχει γωνία $\omega \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\eta\mu\omega = \sigma\upsilon\nu\omega = 1$.
Τότε σύμφωνα με την γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

είναι $1^2 + 1^2 = 1 \Leftrightarrow 2 = 1$ που είναι άτοπο.
Επομένως, δεν υπάρχει γωνία $\omega \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\eta\mu\omega = \sigma\upsilon\nu\omega = 1$.

Γ2.

α. Είναι $\begin{cases} 10y^2 = 9x + 1 \\ 9x - 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10y^2 = 9x + 1 & (1) \\ 9x = 2y + 7 & (2) \end{cases}$

Η σχέση (1) λόγω της (2) γίνεται:

$$10y^2 = 2y + 7 + 1 \Leftrightarrow 10y^2 - 2y - 8 = 0 \overset{:2}{\Leftrightarrow} 5y^2 - y - 4 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-4) = 1 + 80 = 81$$

Επομένως, $y_{1,2} = \dfrac{1 \pm 9}{10} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{10}{10} = 1 \\ y_2 = -\dfrac{8}{10} = -\dfrac{4}{5} \end{cases}$

Από τη σχέση (1):

- για $y = 1$ είναι $9x = 2 + 7 \Leftrightarrow 9x = 9 \Leftrightarrow x = 1$
- για $y = -\dfrac{4}{5}$ είναι $9x = -\dfrac{8}{5} + 7 \Leftrightarrow 9x = -\dfrac{8}{5} + \dfrac{35}{5} \Leftrightarrow 9x = \dfrac{27}{5} \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{5}$

Οπότε, οι λύσεις (x, y) του συστήματος είναι οι $(1,1)$ και $\left(\dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{5}\right)$.

β. Σύμφωνα με τα δεδομένα είναι $\eta\mu\alpha = x_0$ και $\sigma\upsilon\nu\alpha = y_0$, όπου (x_0, y_0) μία από τις λύσεις του παραπάνω συστήματος.
Αν $(x_0, y_0) = (1,1)$ τότε $\eta\mu\alpha = 1$ και $\sigma\upsilon\nu\alpha = 1$, το οποίο λόγω του ερωτήματος Γ1, απορρίπτεται.
Άρα, $(x_0, y_0) = \left(\dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{5}\right)$. Οπότε, $\eta\mu\alpha = \dfrac{3}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu\alpha = -\dfrac{4}{5}$.

Επίσης, είναι $\varepsilon\varphi\alpha = \dfrac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = \dfrac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\dfrac{3}{4}$ και $\sigma\varphi\alpha = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} = \dfrac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\dfrac{4}{3}$.

γ. Είναι:

- $\eta\mu\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\eta\mu\left(-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)=-\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\sigma\upsilon\nu\alpha$,
- $\sigma\upsilon\nu(-\alpha)=\sigma\upsilon\nu\alpha$,
- $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi+\pi}{2}+\alpha\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=$

  $-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-(-\alpha)\right)=-\eta\mu(-\alpha)=\eta\mu\alpha$,
- $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sigma\upsilon\nu\alpha$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στην παράσταση Α είναι

$$A=-\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha-\frac{3}{5}\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\eta\mu^2\alpha$$

$$=-\cancel{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}-\frac{3}{5}\eta\mu\alpha+\cancel{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}+\eta\mu^2\alpha$$

$$=-\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}+\left(\frac{3}{5}\right)^2=-\frac{9}{25}+\frac{9}{25}=0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι:

- $\eta\mu(\omega+50^\circ)=\eta\mu\left(90^\circ-(40^\circ-\omega)\right)=\sigma\upsilon\nu(40^\circ-\omega)$
- $\varepsilon\varphi(65^\circ+\omega)=\varepsilon\varphi\left(90^\circ-(25^\circ-\omega)\right)=\sigma\varphi(25^\circ-\omega)$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στην παράσταση είναι:

$\alpha=\eta\mu^2(40^\circ-\omega)+\varepsilon\varphi(25^\circ-\omega)\cdot\sigma\varphi(25^\circ-\omega)+\sigma\upsilon\nu^2(40^\circ-\omega)+1=$

$=\eta\mu^2(40^\circ-\omega)+1+\sigma\upsilon\nu^2(40^\circ-\omega)+1=1+2=3$

Επομένως, $f(x)=\beta\cdot\eta\mu(3x)$, $x\in\mathbb{R}$.

Δ2. Αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{71\pi}{9},-\sqrt{3}\right)$ ισχύει ότι:

$$f\left(\frac{71\pi}{9}\right)=-\sqrt{3}\Leftrightarrow \beta\cdot\eta\mu\left(3\cdot\frac{71\pi}{9}\right)=-\sqrt{3}\Leftrightarrow \beta\cdot\eta\mu\left(\frac{71\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta\cdot\eta\mu\left(\frac{72\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}\Leftrightarrow \beta\cdot\eta\mu\left(24\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta\cdot\eta\mu\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}\Leftrightarrow -\beta\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\Leftrightarrow \beta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\Leftrightarrow \beta=2$$

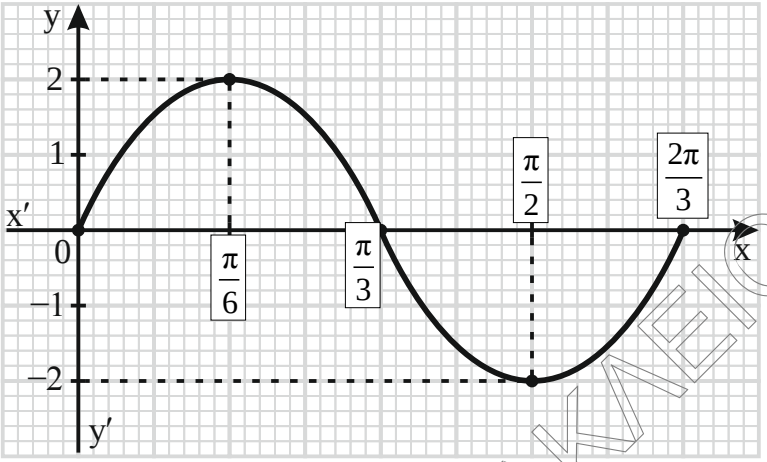
Άρα, $f(x)=2\eta\mu(3x)$, $x\in\mathbb{R}$.

Δ3. Η συνάρτηση $f(x)=2\eta\mu(3x)$, έχει:

- μέγιστη τιμή ίση με: $|2|=2$,
- ελάχιστη τιμή ίση με: $-|2|=-2$
- και περίοδο ίση με: $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{3}$.

Έχοντας υπόψιν τα παραπάνω στοιχεία και με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα τιμών, σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της $f(x)=2\eta\mu(3x)$, $x\in\mathbb{R}$, σε πλάτος μίας περιόδου.

$3x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
$\eta\mu(3x)$	0	1	0	-1	0
$2\cdot\eta\mu(3x)$	0	2	0	-2	0



Δ4. Είναι:

$$f(x)=2\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow 2\eta\mu(3x)=2\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

Άρα, οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται από τους τύπους:

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\pi}{2}-3x=2\kappa\pi+x+\frac{\pi}{3}\\ \text{ή}\\ \frac{\pi}{2}-3x=2\kappa\pi-x-\frac{\pi}{3}\end{array}\right\},\kappa\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-4x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\\ \text{ή}\\ -2x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\end{array}\right\},\kappa\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-4x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{6}\\ \text{ή}\\ -2x=2\kappa\pi-\frac{5\pi}{6}\end{array}\right\},\kappa\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=-\frac{\kappa\pi}{2}+\frac{\pi}{24}\\ \text{ή}\\ x=-\kappa\pi+\frac{5\pi}{12}\end{array}\right\},\kappa\in\mathbb{Z}$$

ΤΕΛΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ