ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΑΛΓΕΒΡΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

Ημερομηνία: Σάββατο 21 Απριλίου 2018
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 134

Α2.

(α) $\ln e^{-\theta} = -\theta$

(β) $e^{\ln\theta} = \theta$

(γ) $\ln 1 = 0$

(δ) $\ln\frac{1}{e} = \ln 1 - \ln e = 0 - 1 = -1$

(ε) $\ln^2 e^2 = \left(\ln e^2\right)^2 = \left(2\ln e\right)^2 = 4$

Α3. **(α)** Λάθος **(β)**Σωστό **(γ)** Σωστό **(δ)** Λάθος **(ε)** Σωστό

ΘΕΜΑΒ

Β1. Εφόσον η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(3\pi,3)$ ισχύει:

$$f(3\pi) = 3 \Leftrightarrow \alpha - \beta\eta\mu\frac{3\pi}{2} = 3 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 3 \ (1)$$

Επίσης

$$f(\pi) = -1 \Leftrightarrow \alpha - \beta\eta\mu\frac{\pi}{2} = -1 \Leftrightarrow \alpha - \beta = -1 \ (2)$$

Επομένως έχουμε το σύστημα των εξισώσεων $(1),(2)$

$$\begin{cases}\alpha+\beta=3\\ \alpha-\beta=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta-1+\beta=3\\ \alpha=\beta-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\beta=4\\ \alpha=\beta-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=2\\ \alpha=1\end{cases}$$

Β2. Η συνάρτηση γίνεται $f(x)=1-2\eta\mu\frac{x}{2}$ με πεδίο ορισμού $A=\mathbb{R}$

Έχει περίοδο $T=\frac{2\pi}{\omega}\overset{\omega=\frac{1}{2}}{=}4\pi$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$-1\le\eta\mu\frac{x}{2}\le1\Leftrightarrow-2\le-2\eta\mu\frac{x}{2}\le2\Leftrightarrow-1\le f(x)\le3$$

Επομένως η μέγιστη τιμή της είναι το 3 και η ελάχιστη τιμή της το -1 εφόσον

$$f(3\pi)=3 \text{ και } f(\pi)=-1$$

Β3. Η εξίσωση $f^2(x)+4=4f(x)$ ισοδύναμα γίνεται

$$f^2(x)-4f(x)+4=0\Leftrightarrow(f(x)-2)^2=0\Leftrightarrow f(x)-2=0\Leftrightarrow1-2\eta\mu\frac{x}{2}-2=0$$

$$\Leftrightarrow\eta\mu\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\eta\mu\frac{x}{2}=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x}{2}=2\kappa\pi-\frac{\pi}{6}\\ \text{ή}\\ \frac{x}{2}=2\kappa\pi+\frac{7\pi}{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\kappa\pi-\frac{\pi}{3}\\ \text{ή}\\ x=4\kappa\pi+\frac{7\pi}{3}\end{cases},\kappa\in\mathbb{Z},x\in[0,4\pi]$$

Αναζητάμε τις λύσεις στο διάστημα $[0,4\pi]$

$$0\le x\le4\pi\Leftrightarrow0\le4\kappa\pi-\frac{\pi}{3}\le4\pi\Leftrightarrow0\le4\kappa-\frac{1}{3}\le4$$

$$\Leftrightarrow0\le12\kappa-1\le12\Leftrightarrow1\le12\kappa\le13\Leftrightarrow\frac{1}{12}\le\kappa\le\frac{13}{12}$$

Επειδή $\kappa\in\mathbb{Z}$ η μόνη τιμή του ακεραίου κ που βρίσκεται στο διάστημα $\left[\frac{1}{12},\frac{13}{12}\right]$ είναι η $\kappa=1$ επομένως η λύση είναι $x=4\pi-\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=\frac{11\pi}{3}$

$$0 \le x \le 4\pi \Leftrightarrow 0 \le 4\kappa\pi + \frac{7\pi}{3} \le 4\pi \Leftrightarrow 0 \le 4\kappa + \frac{7}{3} \le 4$$

$$\Leftrightarrow 0 \le 12\kappa + 7 \le 12 \Leftrightarrow -7 \le 12\kappa \le 5 \Leftrightarrow -\frac{7}{12} \le \kappa \le \frac{1}{12}$$

Επειδή $\kappa \in \mathbb{Z}$ η μόνη τιμή του ακεραίου κ που βρίσκεται στο διάστημα $\left[-\frac{7}{12}, \frac{1}{12}\right]$ είναι η $\kappa = 0$ επομένως η λύση είναι $x = \frac{7\pi}{3}$

Β4. Η εξίσωση γίνεται:

$$f(x) = \eta\mu\frac{39\pi}{2} - e \Leftrightarrow f(x) = \eta\mu\left(20\pi - \frac{\pi}{2}\right) - e \Leftrightarrow 1 - 2\eta\mu\frac{x}{2} = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) - e$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\eta\mu\frac{x}{2} = -1 - e \Leftrightarrow \eta\mu\frac{x}{2} = 1 + \frac{e}{2}$$

Ισχύει $-1 \le \eta\mu\frac{x}{2} \le 1$ για κάθε πραγματικό αριθμό x επομένως η εξίσωση είναι αδύνατη.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Συμπληρώνοντας το σχήμα Horner έχουμε ότι

α	-8	22	-24	β	1
	α	$\alpha-8$	$\alpha+14$	$\alpha-10$	
α	$\alpha-8$	$\boxed{\alpha+14}$	$\alpha-10$	$\boxed{\alpha-10+\beta}$	

Επομένως με βάση το αρχικό ελλιπές σχήμα Horner

α	-8	22	-24	β	1
		15		0	

Προκύπτει:

$$\alpha+14=15 \Leftrightarrow \alpha=1$$

και

$$\alpha-10+\beta=0 \Leftrightarrow 1-10+\beta=0 \Leftrightarrow \beta=9$$

Οπότε για $\alpha=1$ και $\beta=9$ το πολυώνυμο γίνεται

$$f(x)=x^4-8x^3+22x^2-24x+9$$

Γ2. Εφόσον το 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου τότε με τη βοήθεια του σχήματος Horner έχουμε

1	−8	22	−24	9	1
	1	−7	15	−9	
1	−7	15	−9	0	

Άρα $f(x)=(x-1)(x^3-7x^2+15x-9)$ **(1)**

Παραγοντοποιώντας το $x^3-7x^2+15x-9$ με το σχήμα Horner έχουμε

1	−7	15	9	1
	1	−6	−9	
1	−6	9	0	

Έχουμε $x^3-7x^2+15x-9=(x-1)(x^2-6x+9)$

Αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε:

$$f(x)=(x-1)(x-1)(x^2-6x+9)=(x-1)^2(x-3)^2$$

Από την τελευταία προκύπτει: $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Οπότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$

Γ3. **(i)** Για να ορίζεται η συνάρτηση πρέπει και αρκεί

$$x^2-4x+3\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1 \ \textbf{και}\ x\neq 3$$

$$\text{Επομένως } A_h=(-\infty,1)\cup(1,3)\cup(3,+\infty)$$

(ii) Για να βρούμε τα κοινά τους σημεία θα λύσουμε την εξίσωση

$$h(x)=x \ \text{ με } \ x\neq 1 \text{ και } x\neq 3$$

$$h(x)=x \Leftrightarrow 1+\frac{f(x)}{x^2-4x+3}=x \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2(x-3)^2}{(x-1)(x-3)}=x-1$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-3)=x-1 \Leftrightarrow x-3=1 \Leftrightarrow x=4$$

Άρα το κοινό τους σημείο είναι το $A(4,4)$

Γ4. Για την επίλυση της εξίσωσης, υπολογίζουμε τις τιμές της συνάρτησης $f(0)=9, f(2)=1$ και $f(4)=9$

$$[f(2)]^x+3\cdot[f(4)]^{2x}=4[f(0)]^x \Leftrightarrow +1+3\cdot 9^{2x}=4\cdot 9^x$$

$$\Leftrightarrow 3\cdot 9^{2x}-4\cdot 9^x+1=0$$

Θέτουμε στην τελευταία $9^x=\omega>0$ οπότε μετασχηματίζεται ως εξής:

$$3\omega^2-4\omega+1=0$$

Η τελευταία έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και $\frac{1}{3}$ επομένως

$$9^x=1 \Leftrightarrow 9^x=9^0 \Leftrightarrow x=0$$

$$9^x=\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3^{2x}=3^{-1} \Leftrightarrow 2x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$$

ΘΕΜΑΔ

Δ1.

(i) Για την συνάρτηση f πρέπει και αρκεί:

$$\frac{e^x-1}{x}>0 \Leftrightarrow x\left(e^x-1\right)>0$$

- $e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow x>0$
- $e^x-1<0 \Leftrightarrow e^x<1 \Leftrightarrow x<0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	|	+
e^x-1	-	|	+
$x\left(e^x-1\right)$	+	|	+

Άρα το πεδίο ορισμού της είναι $A_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

(ii) Για την συνάρτηση g πρέπει και αρκεί:

$$\begin{cases} e^{x^2}-1>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x^2}>1 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>0$$

Άρα το πεδίο ορισμού της είναι $A_g=(0,+\infty)$

Δ2. $f(2x)-f(x)=\ln\left(e^{2x}-2e^x+3\right)-\ln 2 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)-\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=\ln\left(e^{2x}-2e^x+3\right)-\ln 2$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{\frac{e^{2x}-1}{2x}}{\frac{e^x-1}{x}}\right)=\ln\left(e^{2x}-2e^x+3\right)-\ln 2 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x\left(e^x-1\right)\left(e^x+1\right)}{2x\left(e^x-1\right)}\right)=\ln\left(\frac{e^{2x}-2e^x+3}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^x+1}{2}\right)=\ln\left(\frac{e^{2x}-2e^x+3}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{e^x+1}{2}=\frac{e^{2x}-2e^x+3}{2} \Leftrightarrow e^{2x}-3e^x+2=0$$

Θέτουμε $e^x=y>0$ άρα η εξίσωση γίνεται $y^2-3y+2=0$

Η τελευταία έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και 2

Επομένως

$$e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ απορρίπτεται εφόσον πρέπει } x \neq 0$$

και

$$e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2 \text{ δεκτή}$$

Δ3. Η ανίσωση ορίζεται για εκείνα τα x για τα οποία ισχύει

$$x \in A_f \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ και } x \in A_g \Leftrightarrow x > 0$$

$$x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ και } x > 0$$

Δηλαδή πρέπει $x > 0$ άρα

$$f(x) + \ln x > g(x) + \ln x^2 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) + \ln x > g(x) + 2\ln x$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^x - 1\right) - \ln x + \ln x > \ln\left(e^{x^2} - 1\right) - 2\ln x + 2\ln x$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^x - 1\right) > \ln\left(e^{x^2} - 1\right) \Leftrightarrow x > x^2 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 1 > x$$

Άρα $x \in (0,1)$

Δ4.

(i) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(x) - f(-x) = x$

$$f(x) - f(-x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) - \ln\left(\frac{e^{-x} - 1}{-x}\right) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) - \ln\left(\frac{1 - e^{-x}}{x}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\frac{e^x - 1}{x}}{\frac{1 - e^{-x}}{x}}\right) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{1 - e^{-x}}\right) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{1 - \frac{1}{e^x}}\right) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{\frac{e^x - 1}{e^x}}\right) = \ln e^x = x$$

(ii) Αντικαθιστώντας στην σχέση $f(x) - f(-x) = x$ όπου $x = 2018$ παίρνουμε

$$f(2018) - f(-2018) = 2018 > 0$$

Άρα $f(2018) > f(-2018)$