



ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Τρίτη 7 Ιανουαρίου 2020
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 33 παράγραφος 1.4

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 21 παράγραφος 1.3

A3.

- i. Λάθος
- ii. Σωστό
- iii. Σωστό
- iv. Σωστό
- v. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \cos(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 2 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$

B2. Είναι $3\lambda\vec{\beta} \neq \vec{0} \Leftrightarrow 3\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$

$$(\lambda\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \perp 3\lambda\vec{\beta} \Leftrightarrow$$

$$(\lambda\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot 3\lambda\vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow 3\lambda^2\vec{\alpha}\vec{\beta} - 3\lambda\vec{\beta}^2 = 0 \Leftrightarrow 3\lambda^2 \cdot 1 - 3\lambda|\vec{\beta}|^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$3\lambda^2 - 3\lambda = 0 \Leftrightarrow 3\lambda(\lambda - 1) = 0 \stackrel{\lambda \neq 0}{\Leftrightarrow} \lambda = 1$$

B3. Είναι $|\vec{u}|^2 = \vec{u}^2 = (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 + 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 4\vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 + 4 \cdot 1 + 4|\vec{\beta}|^2 = 2^2 + 4 + 4 \cdot 1^2 = 12$
οπότε $|\vec{u}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Είναι $|\vec{v}|^2 = \vec{v}^2 = (\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 - 2 \cdot 1 + |\vec{\beta}|^2 = 2^2 - 2 + 1^2 = 3$
οπότε $|\vec{v}| = \sqrt{3}$.

B4. Είναι $\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = \vec{\alpha}^2 - \vec{\alpha}\vec{\beta} + 2\vec{\beta}\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 + \vec{\alpha}\vec{\beta} - 2|\vec{\beta}|^2 = 4 + 1 - 2 = 3$
οπότε $\sigma\upsilon\nu(\hat{u}, \hat{v}) = \frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{3}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{2}$ άρα $(\hat{u}, \hat{v}) = \frac{\pi}{3}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αν Κ το κέντρο του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ τότε Κ μέσο του ΑΓ οπότε

$$K\left(\frac{x_A + x_\Gamma}{2}, \frac{y_A + y_\Gamma}{2}\right) \text{ δηλαδή } K\left(\frac{2+4}{2}, \frac{3+(-3)}{2}\right) \text{ οπότε } K(3,0).$$

Όμως Κ μέσο της ΒΔ οπότε

$$x_K = \frac{x_B + x_\Delta}{2} \Leftrightarrow 3 = \frac{-1 + x_\Delta}{2} \Leftrightarrow x_\Delta = 7 \text{ και}$$

$$y_K = \frac{y_B + y_\Delta}{2} \Leftrightarrow 0 = \frac{1 + y_\Delta}{2} \Leftrightarrow y_\Delta = -1 \text{ οπότε } \Delta(7, -1).$$

Γ2. Είναι $\lambda_{\text{ΑΓ}} = \frac{-3-3}{4-2} = -3$, οπότε ΑΓ: $y-3 = -3(x-2)$ δηλαδή ΑΓ: $y = -3x + 9$

$$\text{Είναι } \lambda_{\text{ΒΔ}} = \frac{-1-1}{7+1} = -\frac{1}{4}, \text{ οπότε ΒΔ: } y-1 = -\frac{1}{4}(x+1) \text{ δηλαδή ΒΔ: } y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$$

Γ3. Είναι $\varepsilon \parallel \text{ΑΓ} \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_{\text{ΑΓ}} \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = -3$ και αφού διέρχεται από το σημείο Β(-1,1) έχει εξίσωση $\varepsilon: y-1 = -3(x+1) \Leftrightarrow \varepsilon: y = -3x - 2$

Γ4. Αφού Μ μέσο της ΒΓ άρα $M\left(\frac{x_B + x_\Gamma}{2}, \frac{y_B + y_\Gamma}{2}\right)$ δηλαδή $M\left(\frac{-1+4}{2}, \frac{1+(-3)}{2}\right)$

οπότε $M\left(\frac{3}{2}, -1\right)$. Αν $\Lambda(x_\Lambda, y_\Lambda)$, αφού το Λ είναι σημείο της $\varepsilon: y = -3x - 2$ άρα

$$y_\Lambda = -3x_\Lambda - 2 \quad (1).$$

Α, Μ, Λ συνευθειακά όταν:

$$\vec{AM} \parallel \vec{ML} \Leftrightarrow \det\left(\begin{matrix} \vec{AM} \\ \vec{ML} \end{matrix}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{3}{2} - 2 & -1 - 3 \\ x_\Lambda - \frac{3}{2} & y_\Lambda + 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -4 \\ x_{\Lambda} - \frac{3}{2} & y_{\Lambda} + 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(y_{\Lambda} + 1) - (-4)\left(x_{\Lambda} - \frac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow -y_{\Lambda} - 1 + 8x_{\Lambda} - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$-y_{\Lambda} + 8x_{\Lambda} = 13$, όμως ισχύει και η σχέση (1), άρα από το σύστημα

$$\left. \begin{array}{l} 8x_{\Lambda} - y_{\Lambda} = 13 \\ y_{\Lambda} = -3x_{\Lambda} - 2 \end{array} \right\} \text{έχουμε ότι } 8x_{\Lambda} - (-3x_{\Lambda} - 2) = 13 \Leftrightarrow x_{\Lambda} = 1.$$

Άρα από την σχέση (1) έχουμε $y_{\Lambda} = -3 \cdot 1 - 2 = -5$, οπότε $\Lambda(1, -5)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε ότι η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $\Lambda(1,0)$, άρα

$$\begin{aligned} \frac{|3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| - 3|\vec{\alpha}|}{2} + |\vec{\alpha}| &= 0 \Leftrightarrow |3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| - 3|\vec{\alpha}| = -2|\vec{\alpha}| \Leftrightarrow |3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| \Leftrightarrow \\ |3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}|^2 &= |\vec{\alpha}|^2 \Leftrightarrow 9\vec{\alpha}^2 + 12\vec{\alpha}\vec{\beta} + 4\vec{\beta}^2 = \vec{\alpha}^2 \Leftrightarrow 12\vec{\alpha}\vec{\beta} = -9\vec{\alpha}^2 - 4\vec{\beta}^2 + \vec{\alpha}^2 \Leftrightarrow \\ 12\vec{\alpha}\vec{\beta} &= -8\vec{\alpha}^2 - 4(2|\vec{\alpha}|)^2 \Leftrightarrow 12\vec{\alpha}\vec{\beta} = -8\vec{\alpha}^2 - 16\vec{\alpha}^2 \Leftrightarrow 12\vec{\alpha}\vec{\beta} = -24\vec{\alpha}^2 \Leftrightarrow \\ \vec{\alpha}\vec{\beta} &= -2\vec{\alpha}^2 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\vec{\beta} = -2|\vec{\alpha}|^2 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\vec{\beta} = -2|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\alpha}| \Leftrightarrow \vec{\alpha}\vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \end{aligned}$$

Άρα $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$.

Δ2. Έχουμε ότι: $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_{\varepsilon_2} \Leftrightarrow 2|\vec{\alpha}| + 3 = |\vec{\alpha}| + 5 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}| = 2$.

Άρα $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}| = 2 \cdot 2 \Leftrightarrow |\vec{\beta}| = 4$ και $\vec{\alpha}\vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha}\vec{\beta} = -2 \cdot 4 = -8$.

Δ3. Έχουμε ότι $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\beta} = \kappa \cdot \vec{\alpha}$ με $\kappa < 0$ άρα έχουμε ότι

$$\vec{\beta} = \kappa \cdot \vec{\alpha} \Rightarrow |\vec{\beta}| = |\kappa| \cdot |\vec{\alpha}| \Leftrightarrow 2|\vec{\alpha}| = |\kappa| \cdot |\vec{\alpha}| \Leftrightarrow |\kappa| = 2. \text{ Και επειδή } \kappa < 0 \text{ έχουμε}$$

ότι $\kappa = -2$. Επομένως $\vec{\beta} = -2\vec{\alpha}$.

Η ευθεία ε γράφεται διαδοχικά:

$$(\varepsilon): y = \frac{|3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| - 3|\vec{\alpha}|}{2}x + |\vec{\alpha}| \Leftrightarrow y = \frac{|3\vec{\alpha} - 4\vec{\alpha}| - 3|\vec{\alpha}|}{2}x + |\vec{\alpha}| \Leftrightarrow (\varepsilon): y = -|\vec{\alpha}|x + |\vec{\alpha}| \Leftrightarrow$$

$$y = -2x + 2.$$

Δ4. Ισχύει ότι: $B\Gamma \perp \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_{B\Gamma} \cdot \lambda_{\varepsilon} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{B\Gamma} \cdot (-2) = -1 \Leftrightarrow \lambda_{B\Gamma} = \frac{1}{2}$.

$$(B\Gamma): y - y_B = \lambda_{B\Gamma}(x - x_B) \Leftrightarrow y - 2 = \frac{1}{2}\left(x - \frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$$

Το μέσο Μ του ΒΓ είναι το σημείο τομής των ΒΓ και ε. Προκύπτει δε από την λύση του συστήματος:

$$\left. \begin{array}{l} y = -2x + 2 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \end{array} \right\} \text{τα πρώτα μέλη των εξισώσεων είναι ίσα επομένως έχουμε ότι:}$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} = -2x + 2 \Leftrightarrow 2x + 3 = -8x + 8 \Leftrightarrow 10x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Για $x = \frac{1}{2}$ ισχύει ότι: $y = -2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \Leftrightarrow y = 1$. Άρα $M\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Μ μέσο του ΒΓ όταν :

$$x_M = \frac{x_{\Gamma} + x_B}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{x_{\Gamma} + \frac{5}{2}}{2} \Leftrightarrow x_{\Gamma} + \frac{5}{2} = 1 \Leftrightarrow x_{\Gamma} = -\frac{3}{2} \text{ και}$$

$$y_M = \frac{y_{\Gamma} + y_B}{2} \Leftrightarrow 1 = \frac{y_{\Gamma} + 2}{2} \Leftrightarrow y_{\Gamma} + 2 = 2 \Leftrightarrow y_{\Gamma} = 0 \text{ οπότε } \Gamma\left(-\frac{3}{2}, 0\right).$$