



**ΤΑΞΗ:** Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ:** ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**Ημερομηνία: Σάββατο 11 Μαΐου 2019**  
**Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες**

### ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

#### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Έστω  $f$  μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $[a, \beta]$ .

Αν  $G$  μια παράγουσα της  $f$  στο  $[a, \beta]$  τότε  $\int_a^\beta f(t) dt = G(\beta) - G(a)$

**Μονάδες 7**

**A2.** Δίνεται ο παρακάτω ισχυρισμός

<<Εστώ μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ .>>

Αν η  $f$  είναι κυρτή στο  $\Delta$  τότε  $f''(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$

**(α)** Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός είναι αληθής ή ψευδής

**Μονάδες 1**

**(β)** Να τεκμηριώσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α)

**Μονάδες 3**

**A3.** Αν για μία συνάρτηση  $f$  ισχύουν:

- Είναι συνεχής στο  $[0, 1]$
- Είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, 1)$
- $f(0) = 3$  και  $f(1) = -2$
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[0, 1]$

**Τότε:**

- (α) Η  $C_f$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη ένα εσωτερικό σημείο του διαστήματος  $(0,1)$
- (β) Η εφαπτομένη της  $C_f$  σε κάποιο σημείο της  $M(x_0, f(x_0)), x_0 \in (0,1)$  είναι παράλληλη στην ευθεία  $y = -5x + 2019$
- (γ) Υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (0,1)$  τέτοιο ώστε  $f(x_0) = \pi$
- (δ) Η ελάχιστη τιμή της  $f$  είναι το  $-2$  και η μέγιστη το  $3$

**Ποια από τις παραπάνω προτάσεις είναι ψευδής;**

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη ΣΩΣΤΟ, αν η πρόταση είναι σωστή ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση που ακολουθεί είναι λανθασμένη.

- (α) Μία συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνάρτηση 1-1 αν και μόνο αν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in A$  ισχύει η συνεπαγωγή: αν  $x_1 = x_2$  τότε  $f(x_1) = f(x_2)$
- (β) Αν υπάρχει το όριο της  $f$  στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$ , εφόσον  $f(x) \geq 0$  κοντά στο  $x_0$  με  $k \in \mathbb{N}$  και  $k \geq 2$ .
- (γ) Αν το  $A(x_0, f(x_0))$  είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της  $f$  και η  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη τότε  $f''(x_0) = 0$
- (δ) Αν μια συνάρτηση  $f$  δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο  $x_0$ , τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ .
- (ε) Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού  $v \geq 2$ , η οποία έχει ασύμπτωτη.

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}, x \neq 2$

**B1** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα  $A_1 = (-\infty, 2)$ ,  $A_2 = (2, +\infty)$  και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

**Μονάδες 7**

**B2.** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι 1-1 και να βρεθεί η αντιστροφή της.

**Μονάδες 6**

**B3.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα, να βρείτε τις ασύμπτωτές της  $f$  και να κάνετε την γραφική της παράσταση.

**Μονάδες 6**

**B4.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της  $f$  την οριζόντια ασύμπτωτή της στο  $+\infty$  και τις ευθείες  $x = 3$   $x = 5$

**Μονάδες 6****ΘΕΜΑ Γ**

Έστω οι συναρτήσεις  $f(x) = a^{x-1}, a > 1, x \in \mathbb{R}, g(x) = \ln(x+1), x > -1$  και η ευθεία  $\varepsilon: y = x$  η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση της  $f$

**Γ1. (α)** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι κυρτή (3 μονάδες) και ότι  $a = e$  (3 μονάδες)

**Μονάδες 6**

**(β)** Να δείξετε ότι η  $g$  είναι κοίλη και ότι η  $y = x$  και εφάπτεται στην  $C_g$  στο  $x = 0$

**Μονάδες 2**

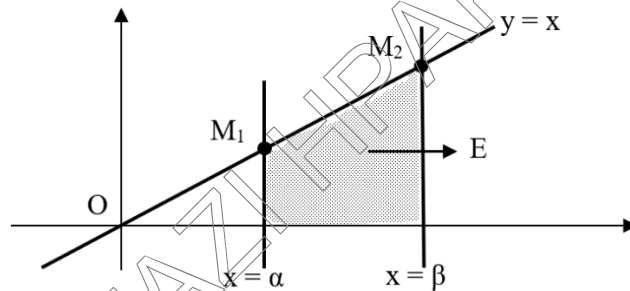
**Γ2.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $h(x) = e^{x-1} - (x+1)\ln(x+1) + x$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $A = (-1, +\infty)$  και στη συνέχεια να λυθεί η ανίσωση  $e^x - e(e^x + 1)\ln(e^x + 1) + e^{x+1} > e^x - e(ex + 1)\ln(ex + 1) + e^2x$  στο διάστημα  $(0, +\infty)$

**Μονάδες 7**

Γ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση  $x^3 + \int_0^1 x f(t^2) dt = \int_0^{e-1} g(t) dt$  έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα  $(0,1)$

**Μονάδες 5**

Γ4. Δύο σημεία  $M_1(\alpha, \alpha), M_2(\beta, \beta)$  της ευθείας  $\varepsilon: y = x$  ξεκινούν την χρονική στιγμή  $t = 0$  και κινούνται σε αυτή έτσι ώστε:  $\alpha'(t) = 2\text{cm/s}$ ,  $\beta'(t) = 1\text{cm/s}$  και  $\alpha(0) = 0$ ,  $\beta(0) = 3$  με  $t \in [0, 3]$ , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Να δείξετε  $\alpha(t) = 2t$ ,  $\beta(t) = t + 3$  και να βρεθεί η χρονική στιγμή  $t$  όπου το εμβαδόν χωρίου  $E$  που περικλείεται από την  $y = x$  τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = \alpha, x = \beta$  μηδενίζεται καθώς και τη χρονική στιγμή που αυτό γίνεται μέγιστο.

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , έχει σύνολο τιμών

$$f(\mathbb{R}) = (0, +\infty) \text{ και ισχύει: } f(x) = \begin{cases} e^{x-f(x)} & \text{αν } x \leq 1 \\ \frac{x \ln x}{x-1} & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

Δ1. Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης ευθείας της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $A(1, f(1))$  και να δείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

**Μονάδες 7**

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2019  
Β' ΦΑΣΗ

Ε\_3.Μλ3Θ0(ε)

Δ2. Να αποδείξετε ότι  $2x \ln x \leq x^2 - 1$  για κάθε  $x \geq 1$  και να μελετηθεί η  $f$  ως προς την κυρτότητα

Μονάδες 7

Δ3. Να δείξετε ότι η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $g$  για την οποία ισχύει  $0 \leq g(x) \leq (f(x) - 2019)^2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  εφάπτεται στον άξονα  $x'x$

Μονάδες 6

Δ4. Να δείξετε ότι ισχύει:  $\int_0^1 \frac{4x^3 f(x^2)}{(f(x^2)+1)^3} dx = 2f(0) - 1$

Μονάδες 5