



ΤΑΞΗ: Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Κυριακή 24 Μαΐου 2020
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σελίδα 116, η πρώτη κουκίδα.

A2. Σελίδα 128. Σχήμα και επιβεβαίωση αμέσως μετά το θεώρημα.

- A3. α) Λάθος
β) Σωστό
γ) Λάθος
δ) Σωστό

A4. Ο ισχυρισμός είναι Ψευδής.

Έχουμε την πρόταση: Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Αν η f είναι σταθερή τότε το $f(\mathbb{R})$ είναι σύνολο με ένα μόνο στοιχείο (μονοσύνολο).

Αν δεν είναι σταθερή τότε το $f(\mathbb{R})$ είναι διάστημα.

Αλλά το $\mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ δεν είναι σύνολο με ένα στοιχείο ούτε διάστημα, αλλά ένωση διαστημάτων.

ΘΕΜΑ Β

B1. Πρέπει και αρκεί: $e^{x-1} - 1 > 0$. Η τελευταία είναι διαδοχικά ισοδύναμη, $e^{x-1} > 1 \Leftrightarrow e^{x-1} > e^0 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$. Άρα, $A = (1, +\infty)$.

Για το σύνολο τιμών θεωρούμε την εξίσωση

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \ln(e^{x-1} - 1) \Leftrightarrow e^{x-1} - 1 = e^y \Leftrightarrow e^{x-1} = 1 + e^y \quad (1)$$

Επειδή $1 + e^y > 0$, η (1) έχει λύση για κάθε $y \in \mathbb{R}$,

$$(1) \Leftrightarrow x - 1 = \ln(1 + e^y) \Leftrightarrow x = \ln(1 + e^y) + 1 \quad (2)$$

Επειδή $x > 1$ πρέπει $\ln(1 + e^y) + 1 > 1$ που ισχύει για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

Άρα, $f(A) = \mathbb{R}$.

Σημείωση: το σύνολο τιμών θα μπορούσε να βρεθεί με τη βοήθεια της μονοτονίας και των αντιστοίχων ορίων.

B2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \frac{1}{e^{x-1} - 1} (e^{x-1} - 1)' = \frac{e^{x-1}}{e^{x-1} - 1} > 0, x \in A. \text{ Συμπεραίνουμε ότι η } f \text{ είναι}$$

γνησίως αύξουσα επομένως και "1-1" συνεπώς αντιστρέφεται. Από τη σχέση (2) έχουμε:

$$f^{-1}(x) = \ln(1 + e^x) + 1, x \in \mathbb{R}.$$

Σημείωση: Η ιδιότητα ότι η f είναι "1-1" θα μπορούσε να αποδειχθεί με τη βοήθεια του ορισμού.

B3. Έστω ότι υπάρχει $\rho \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε: $f^{-1}(\ln(e^{\rho-1} - 1)) = \rho^2 - \rho + 1 \quad (1)$.

Επειδή γνωρίζουμε ότι: $f^{-1}(f(x)) = x, x \in A$,

$$(1) \Rightarrow f^{-1}(f(\rho)) = \rho^2 - \rho + 1 \Rightarrow \rho = \rho^2 - \rho + 1 \Rightarrow (\rho - 1)^2 = 0 \Rightarrow \rho = 1, \text{ άτοπο διότι } 1 \notin A.$$

B4. $f^{-1}(x) = \ln(1 + e^x) + 1, x \in \mathbb{R}$.

Η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$, ως άθροισμα των συνεχών $\ln(1 + e^x)$ (σύνθεση των συνεχών $\ln x, 1 + e^x$) και 1 (σταθερή).

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ ομοίως ως άθροισμα παραγωγισίμων με

$$(f^{-1}(x))' = (\ln(1 + e^x) + 1)' = \frac{e^x}{1 + e^x}, x \in (-1, 1).$$

Ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[-1,1]$.

Υπάρχει ένας τουλάχιστον $\zeta \in (-1,1)$ τέτοιο ώστε:

$$(f^{-1})'(\zeta) = \frac{f^{-1}(1) - f^{-1}(-1)}{1+1} \Leftrightarrow \frac{e^\zeta}{1+e^\zeta} = \frac{\ln(1+e)+1 - \ln(1+e^{-1})-1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{e^\zeta}{1+e^\zeta} = \frac{\ln(1+e) - \ln\left(1+\frac{1}{e}\right)}{2} \Leftrightarrow \frac{e^\zeta}{1+e^\zeta} = \frac{\ln e}{2} \Leftrightarrow \frac{e^\zeta}{1+e^\zeta} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$2e^\zeta = 1+e^\zeta \Leftrightarrow e^\zeta = 1 \Leftrightarrow \zeta = 0.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f'(x) = 2x + 2 - 2\ln x - 2 = 2(x - \ln x) > 0$, για κάθε $x > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα, αφού $\ln x \leq x - 1 < x$. Το τελευταίο αποδεικνύεται και από τη μελέτη της συνάρτησης $g(x) = x - \ln x$. Προκύπτει επίσης άμεσα από τη θέση της γραφικής παράστασης της $y = x$ και $h(x) = \ln x$.

Επειδή $f(1) = 0$, αν $x > 1$ είναι $f(x) > f(1) = 0$

αν $0 < x < 1$ είναι $f(x) < f(1) = 0$

Γ2. α. $f(x) > 2x - 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 2x\ln x - 3 > 2x - 3$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x\ln x > 0 \Leftrightarrow x - 2\ln x > 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $r(x) = x - 2\ln x, x > 0$

$$r'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}, x > 0$$

Για $x < 2$, είναι $r'(x) < 0$ και άρα η r είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,2]$

Για $x > 2$, είναι $r'(x) > 0$ και άρα η r είναι γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$

Η συνεχής συνάρτηση r στο σημείο 2 παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $r(2) = 2 - 2\ln 2 = 2(\ln e - \ln 2) > 0$ και άρα $r(x) > 0$

β. Θεωρούμε το $D = [1, +\infty)$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 3) = +\infty$, είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Έτσι $f(D) = [f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [0, +\infty)$ και επειδή το $2020 \in f(D)$ προφανώς υπάρχει x_0 και μάλιστα μοναδικός, αφού η f είναι "1-1", ώστε $f(x_0) = 2020$

Γ3. Έστω το σημείο $M_0(x_0, f(x_0))$

Η εφαπτόμενη της C_f στο M_0 είναι η ευθεία $(\epsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

Επειδή θέλουμε να διέρχεται από το σημείο $A(0, -2)$ πρέπει και αρκεί

$$-2 - f(x_0) = -x_0 f'(x_0) \Leftrightarrow -2 - (x_0^2 + 2x_0 - 2x_0 \ln x_0 - 3) = -x_0 (2x_0 - 2 \ln x_0) \Leftrightarrow$$

$$x_0^2 - 2x_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1$$

Οπότε, πρόκειται για την εφαπτομένη $(\epsilon): y = 2x - 2$ στο σημείο $M_0(1, 0)$

Γ4. Επειδή στο $(1, +\infty)$ είναι $f(x) > 0$ και στο $(0, 1)$ είναι $f(x) < 0$ τελικά είναι $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$. Άρα και $F(x) \neq 0$ διαστήματα $(0, 1)$ και $(1, +\infty)$

Αφού αναζητούμε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις F που ικανοποιούν τη δεδομένη σχέση αυτές θα είναι κατ'ανάγκη και συνεχείς. Ως συνεχής, η F διατηρεί σταθερό πρόσημο σε κάθε ένα από αυτά.

Από $F^2(x) = f^2(x)$ στο $(0, 1)$ είναι ή $F(x) = -f(x)$ ή $F(x) = f(x)$

και στο $(1, +\infty)$ είναι ή $F(x) = -f(x)$ ή $F(x) = f(x)$

Οπότε

$$\text{ή } F_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{αν } 0 < x < 1 \\ f(x) & \text{αν } x \geq 1 \end{cases} = f(x) \text{ ή } F_2(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{αν } 0 < x < 1 \\ -f(x) & \text{αν } x \geq 1 \end{cases} = -f(x)$$

$$\text{ή } F_3(x) = \begin{cases} f(x) & \text{αν } 0 < x < 1 \\ -f(x) & \text{αν } x \geq 1 \end{cases} \text{ ή } F_4(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{αν } 0 < x < 1 \\ f(x) & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

Οι F_1 και F_2 είναι παραγωγίσιμες.

Όμως, η συνάρτηση F_3 στο 1 δεν είναι παραγωγίσιμη

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{F_3(x) - F_3(1)}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{f(x)}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right) = f'(1) = 2$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{F_3(x) - F_3(1)}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{-f(x)}{x - 1} \right) = - \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right) = -f'(1) = -2$$

Εντελώς όμοια καταλήγουμε ότι και η F_4 στο 1 δεν είναι παραγωγίσιμη.

Οπότε, υπάρχουν ακριβώς δύο παραγωγίσιμες στο Δ συναρτήσεις F οι οποίες μάλιστα είναι και αντίθετες.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Α' τρόπος

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα και για $x=0$ όπου χρειαστεί, έχουμε:

$$f''(x) - f(x) = 2e^x \Rightarrow f''(x) + f'(x) - f'(x) - f(x) = 2e^x \Rightarrow (f'(x) + f(x))' - (f'(x) + f(x)) = 2e^x \Rightarrow e^{-x}(f'(x) + f(x))' - e^{-x}(f'(x) + f(x)) = e^{-x}2e^x \Rightarrow e^{-x}(f'(x) + f(x))' + (e^{-x})'(f'(x) + f(x)) = 2 \Rightarrow (e^{-x}(f'(x) + f(x)))' = (2x)' \Rightarrow e^{-x}(f'(x) + f(x)) = 2x + c,$$

για $x=0$ είναι $e^{-0}(f'(0) + f(0)) = 2 \cdot 0 + c \Rightarrow 1(2 - 1) = c \Rightarrow c = 1.$

Άρα $e^{-x}(f'(x) + f(x)) = 2x + 1 \Rightarrow e^{2x}e^{-x}(f'(x) + f(x)) = e^{2x}(2x + 1) \Rightarrow e^x(f'(x) + f(x)) = 2xe^{2x} + e^{2x} \Rightarrow e^x f'(x) + (e^x)' f(x) = x(e^{2x})' + x'e^{2x} \Rightarrow (e^x f(x))' = (xe^{2x})' \Rightarrow e^x f(x) = xe^{2x} + c_1$

για $x=0$ είναι $e^0 f(0) = 0 \cdot e^{2 \cdot 0} + c_1 \Rightarrow 1(-1) = c_1 \Rightarrow c_1 = -1$

Άρα $e^x f(x) = xe^{2x} - 1 \Rightarrow e^{-x}e^x f(x) = e^{-x}(xe^{2x} - 1) \Rightarrow f(x) = xe^x - e^{-x}$

Β' τρόπος

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα και για $x=0$ όπου χρειαστεί, έχουμε:

$$f''(x) - f(x) = 2e^x \Rightarrow f''(x) + f'(x) - f'(x) - f(x) = 2e^x \Rightarrow e^x f''(x) + e^x f'(x) - e^x f'(x) - e^x f(x) = 2e^{2x} \Rightarrow (e^x f''(x) + (e^x)' f'(x)) - (e^x f'(x) + (e^x)' f(x)) = 2e^{2x} \Rightarrow (e^x f'(x))' - (e^x f(x))' = (e^{2x})' \Rightarrow (e^x f'(x) - e^x f(x))' = (e^{2x})' \Rightarrow e^x f'(x) - e^x f(x) = e^{2x} + c$$

Για $x=0$ είναι $e^0 f'(0) - e^0 f(0) = e^{2 \cdot 0} + c \Rightarrow 1 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) = 1 + c \Rightarrow c = 2$

Άρα $e^x f'(x) - (e^x)' f(x) = e^{2x} + 2 \Rightarrow \frac{e^x f'(x) - (e^x)' f(x)}{e^{2x}} = \frac{e^{2x} + 2}{e^{2x}} \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{e^x} \right)' = 1 + 2e^{-2x} = (x - e^{-2x})' \Rightarrow$

$\frac{f(x)}{e^x} = x - e^{-2x} + c_1.$ Για $x=0$ είναι $\frac{f(0)}{e^0} = 0 - e^{-2 \cdot 0} + c_1 \Rightarrow -1 = -1 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0.$

Έτσι έχουμε $\frac{f(x)}{e^x} = x - e^{-2x} \Rightarrow e^x \frac{f(x)}{e^x} = e^x(x - e^{-2x}) \Rightarrow f(x) = xe^x - e^{-x}$

Δ2.

Έχουμε $f(x) = xe^x - e^{-x}$ και $f'(x) = e^x + xe^x + e^{-x} = (x+1)e^x + e^{-x} = (x+1)e^x + \frac{1}{e^x} = \frac{(x+1)e^{2x} + 1}{e^x}$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = (x+1)e^{2x} + 1$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων στο \mathbb{R} συναρτήσεων, με $h'(x) = e^{2x} + 2e^{2x}(x+1) = (2x+3)e^{2x}$. Στον πίνακα που ακολουθεί φαίνεται η συμπεριφορά της συνάρτησης h ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
h'	-	0	+
h		ολ. ελ.	

Η συνάρτηση h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x = -\frac{3}{2}$ την τιμή

$$h\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2} + 1\right) e^{2\left(-\frac{3}{2}\right)} + 1 = -\frac{1}{2e^3} + 1 = \frac{2e^3 - 1}{2e^3} > 0.$$

Επομένως $h(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε $\frac{h(x)}{e^x} > 0$ ή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} και επομένως 1-1 στο \mathbb{R} .

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο \mathbb{R} ως παραγωγίσιμη σε αυτό. Επομένως είναι συνεχής και στο $[0, 1]$.

Επίσης έχουμε $f(0)f(1) = -1\left(e - \frac{1}{e}\right) = \frac{1 - e^2}{e} < 0$. Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του

θεωρήματος Bolzano

για την συνάρτηση f στο $[0, 1]$, επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένας $\rho \in (0, 1)$ τέτοιος ώστε $f(\rho) = 0$.

Έτσι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$ άρα και στο \mathbb{R} η οποία είναι και η μοναδική αφού η f είναι 1-1 στο \mathbb{R} .

Δ3.

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} ως πράξεις παραγωγίσιμων στο \mathbb{R} συναρτήσεων, με

$g'(x) = e^x + (x-1)e^x - e^{-x} = xe^x - e^{-x} = f(x)$. Από το Δ2, γνωρίζουμε ότι η f γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} με μοναδική ρίζα ρ μεταξύ 0 και 1.

Έχουμε για κάθε x_1, x_2 με $x_1 < \rho < x_2 \stackrel{f \text{ γ. αυξ}}{\Rightarrow} f(x_1) < f(\rho) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) < 0 < f(x_2)$. Από τα προηγούμενα προκύπτει ο παρακάτω πίνακας μελέτης της συνάρτησης g:

x	$-\infty$	0	ρ	1
	$+\infty$			
g'=f	-	0	+	
g		ολ.ελ		

Στο διάστημα $(-\infty, \rho]$ η g είναι γνησίως φθίνουσα άρα 1-1. Συνεπώς η προφανής ρίζα $x=0$ είναι η μοναδική στο διάστημα αυτό.

Επίσης έχουμε $0 < \rho \stackrel{g \text{ γ. φθ}}{\Rightarrow} g(\rho) < g(0) \Rightarrow g(\rho) < 0$ (1).

Παρατηρούμε επίσης ότι $g(1) = e^{-1} > 0$ (2).

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο \mathbb{R} ως παραγωγίσιμη σε αυτό. Επομένως είναι συνεχής και στο $[\rho, 1]$. Επίσης, από (1), (2) είναι $g(\rho) \cdot g(1) < 0$. Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano για την συνάρτηση g στο $[\rho, 1]$, επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένας $x_0 \in (\rho, 1)$ τέτοιος ώστε $g(x_0) = 0$.

Έτσι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(\rho, 1)$ άρα και στο $(\rho, +\infty)$ η οποία είναι και η μοναδική αφού η g είναι 1-1 στο $[\rho, +\infty)$, ως γνησίως αύξουσα σε αυτό. Τελικά λοιπόν η εξίσωση $g(x) = 0$, εκτός της προφανούς ρίζας $x = 0$, έχει ακριβώς μία ακόμα τη $x = x_0$.

Δ4.

Α' τρόπος

Αφού το σημείο M κινείται επί της καμπύλης της $y = g(x)$ δηλαδή επί της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g , η τεταγμένη του y συναρτηθεί του χρόνου t για $t \geq 0$ sec δίνεται από τη σχέση

$$y(t) = g(x(t)) \Rightarrow y'(t) = g'(x(t)) \cdot x'(t), \quad t \geq 0 \quad (1)$$

Αν είναι $t_0 \geq 0$ η ζητούμενη χρονική στιγμή τότε θα πρέπει $y'(t_0) = -2$ μον/sec

Η (1) για $t = t_0$ γίνεται $y'(t_0) = g'(x(t_0)) \cdot x'(t_0)$ και αφού $x'(t) = 2$ μον/sec για κάθε $t \geq 0$, έχουμε

$$-2 \text{ μον/sec} = g'(x(t_0)) \cdot 2 \text{ μον/sec} \Rightarrow g'(x(t_0)) = -1 \quad \stackrel{A3}{\Rightarrow}$$

$\Rightarrow f(x(t_0)) = -1 \Rightarrow f(x(t_0)) = f(0) \stackrel{f^{-1}}{\Rightarrow} x(t_0) = 0$. Επομένως το ζητούμενο θα συμβεί όταν το M φθάσει στη θέση με τεταγμένη 0. Αφού ξεκινά από τη θέση με τεταγμένη -2 και η τεταγμένη έχει ρυθμό μεταβολής 2 μον/sec, θα φτάσει στη θέση που πρέπει σε 1 sec από την έναρξη της κίνησης, δηλαδή $t_0 = 1$ sec.

Με χρήση του συμβολισμού Leibniz:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \quad \text{και για } t = t_0 \text{ είναι } \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=t_0} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0=x(t_0)} \cdot \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_0}$$

Β' τρόπος

$x'(t) = 2 = (2t)' \Rightarrow x(t) = 2t + c$ και αφού $x(0) = -2 \Rightarrow c = -2$. Επομένως είναι $x(t) = 2t - 2$, $t \geq 0$

Τότε είναι $y(t) = g(x(t)) = (2t - 3)e^{(2t-2)} + e^{-(2t-2)}$

$$\Rightarrow y'(t) = \dots = 2(e^{2t-2}(2t-2) - e^{-(2t-2)}) \Rightarrow y'(t) = 2f(2t-2)$$

Τη χρονική στιγμή $t = t_0$ είναι $y'(t_0) = 2f(2t_0 - 2) = -2$

$$\Rightarrow 2f(2t_0 - 2) = 2f(0) \Rightarrow f(2t_0 - 2) = f(0) \stackrel{f^{-1}}{\Rightarrow} 2t_0 - 2 = 0 \Rightarrow t_0 = 1 \text{ sec.}$$