



**ΤΑΞΗ:** Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ:** ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**Ημερομηνία:** Σάββατο 4 Μαΐου 2019  
**Διάρκεια Εξέτασης:** 2 ώρες

### ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

#### ΘΕΜΑ Α

**A.1.** Βιβλίο, 3.1 παράγραφος

**A.2.**

**α.** Σ

**β.** Λ

**γ.** Λ

**δ.** Σ

**ε.** Λ

**A.3. α.** Ψ

**β.** Για τα διανύσματα  $\vec{i} = (1, 0)$  και  $\vec{j} = (0, 1)$  ισχύει  $|\vec{i}| = |\vec{j}|$ , όμως  $\vec{i} \neq \vec{j}$

#### ΘΕΜΑ Β

**B.1.** Έστω  $A(x, y)$  τυχαίο σημείο της  $\gamma_1$ .

Τότε για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$  έχουμε:

$$\begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = \lambda + 3 \end{cases} \Rightarrow x - 1 = y - 3 \Rightarrow y = x + 2$$

Οπότε η γραμμή  $\gamma_1$  είναι ευθεία με εξίσωση  $\gamma_1: y = x + 2$ .

**B.2.** Αφού  $\vec{v} // \gamma_2$ , θα ισχύει:

$$\lambda_{\gamma_2} = \lambda_{\vec{v}} \Rightarrow \lambda_{\gamma_2} = \frac{2}{-2} \Rightarrow \lambda_{\gamma_2} = -1.$$

Οπότε η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο  $I(-2, -2)$  είναι:

$$\gamma_2 : y + 2 = -1(x + 2) \Leftrightarrow \gamma_2 : y = -x + 4$$

**B.3.** Το αεροπλάνο που κινείται στην ευθεία  $\gamma_1$  θα περάσει πιο κοντά από το αεροδρόμιο Αθηνών διότι  $d(O, \gamma_1) < d(O, \gamma_2)$ :

$$d(O, \gamma_1) = \frac{|2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$d(O, \gamma_2) = \frac{|-4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

**B.4.** Σημείο τομής των ευθειών  $\gamma_1, \gamma_2$ :

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 2 \\ x + 2 = -x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 2 \\ x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = -3 \end{cases}$$

Άρα το σημείο τομής είναι το  $N(-3, -1)$ .

Είναι  $\vec{ON} = (-3, -1)$  και  $\vec{OI} = (-2, -2)$  και

$$\det(\vec{OI}, \vec{ON}) = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

οπότε το εμβαδόν είναι

$$(ION) = \frac{|\det(\vec{OI}, \vec{ON})|}{2} = 2 \text{ τ.μ.}$$

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ.1.**

$$\begin{aligned} (\vec{\alpha} + \vec{\beta})(3\vec{\alpha} - \vec{\beta}) &= 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3\vec{\alpha}^2 - \vec{\alpha}\vec{\beta} + 3\vec{\alpha}\vec{\beta} - \vec{\beta}^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow 3|\vec{\alpha}|^2 + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} - |\vec{\beta}|^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow 3 + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} - 4 &= 1 \\ \Leftrightarrow 2\vec{\alpha}\vec{\beta} &= 2 \\ \vec{\alpha}\vec{\beta} &= 1 \end{aligned}$$

Επίσης

$$\cos(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|} = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Άρα } \widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}} = \frac{\pi}{3}.$$

**Γ.2**

Έχουμε

$$2p = 2\vec{\beta}(\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}) = 2\vec{\beta}^2 - 4\vec{\alpha}\vec{\beta} = 2 \cdot 4 - 4 \cdot 1 = 8 - 4 = 4$$

Οπότε

$$p = 2 \text{ και } C_1 : y^2 = 4x$$

$$\text{Άρα } E\left(\frac{p}{2}, 0\right) = \left(\frac{2}{2}, 0\right) = (1, 0) \text{ και } (\delta): x = -\frac{p}{2} = -\frac{2}{2} = -1.$$

Ακόμη

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - |\vec{\beta}|(x + 4\vec{\alpha}\vec{\beta}y) + 15 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2(x + 4y) - 15 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 8y - 15 &= 0 \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$-\frac{A}{2} = -\frac{-2}{2} = 1 \text{ και } -\frac{B}{2} = -\frac{-8}{2} = 4$$

άρα  $K(1,4)$ .

$$\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{(-2)^2 + (-8)^2 - 4 \cdot 15}}{2} = \sqrt{2}$$

**Γ.3.**

Η εφαπτομένη της παραβολής στο  $A(1,2)$  έχει εξίσωση:

$$(\varepsilon): 2y = 2(x+1) \Leftrightarrow y = x+1 \Leftrightarrow x - y - 1 = 0.$$

Για να εφάπτεται η ευθεία  $\varepsilon$  στον κύκλο  $C_2$  αρκεί να ισχύει:

$$d(K, \varepsilon) = \rho.$$

Πράγματι

$$d(K, \varepsilon) = \frac{|1 - 4 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = \rho.$$

**Γ.4.**

$$(EK) = \sqrt{(1-1)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{0+16} = 4 > \sqrt{2} = \rho$$

συνεπώς το σημείο  $E$  είναι εξωτερικό του  $C_2$ .

Η μέγιστη απόσταση του  $E$  από τον  $C_2$  ισούται με

$$d_{\max} = (EK) + \rho = 4 + \sqrt{2}$$

και η ελάχιστη απόσταση του  $E$  από τον  $C_2$  ισούται με

$$d_{\min} = (EK) - \rho = 4 - \sqrt{2}$$

## ΘΕΜΑ Δ

Δ.1. Αναγκαία συνθήκη είναι

$$\begin{aligned}\lambda^4 + \lambda^2 &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 2 \\ \Leftrightarrow \lambda^2(\lambda^2 + 1) &= -\lambda(\lambda^2 + 1) + 2(\lambda^2 + 1) \\ \Leftrightarrow (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + \lambda - 2) &= 0 \\ \lambda &= -2 \text{ ή } \lambda = 1\end{aligned}$$

Για  $\lambda = -2$ , η εξίσωση γίνεται

$$\begin{aligned}20x^2 + 20y^2 + 60x - 40y + 320 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 3x - 2y + 16 &= 0\end{aligned}$$

Είναι:

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = -51 < 0$$

οπότε δεν παριστάνει κύκλο.

Για  $\lambda = 1$ , η εξίσωση γίνεται

$$\begin{aligned}2x^2 + 2y^2 - 12x - 16y + 32 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16 &= 0\end{aligned}$$

Είναι:

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = 36 > 0$$

οπότε παριστάνει κύκλο C

Δ.2. Για  $\lambda = 1$ , είναι:  $C: x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16 = 0$ α. Κέντρο  $\Theta(3,4)$  και ακτίνα  $\rho = 3$ .β. Είναι  $d(\Theta, \eta) = \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 15|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 8$ 

Επομένως για την ελάχιστη και μέγιστη απόσταση, αντίστοιχα έχουμε:

$$d_{\min} = d(\Theta, \eta) - \rho = 8 - 3 = 5$$

και:  $d_{\max} = d(\Theta, \eta) + \rho = 8 + 3 = 11$

γ. Οι ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων είναι:

$$\varepsilon_1 : x = 0 \text{ και } \varepsilon_2 : y = \lambda x \Leftrightarrow \lambda x - y = 0$$

Είναι:

$$d(\Theta, \varepsilon_1) = \frac{|3+0+0|}{\sqrt{1+0}} = 3 = \rho$$

Επομένως η  $\varepsilon_1 : x = 0$  είναι μια εφαπτομένη του κύκλου  $C : x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16 = 0$  η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Είναι:

$$d(\Theta, \varepsilon_2) = \frac{|3\lambda - 4|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}$$

Αναγκαία συνθήκη είναι:

$$\begin{aligned} d(\Theta, \varepsilon_2) &= \rho \\ \Leftrightarrow |3\lambda - 4| &= 3\sqrt{\lambda^2 + 1} \\ \Leftrightarrow \lambda &= \frac{7}{24} \end{aligned}$$

Επομένως η  $\varepsilon_2 : y = \frac{7}{24}x$  είναι μια εφαπτομένη του κύκλου  $C : x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16 = 0$  η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

δ. Επειδή  $ΚΛ = 6 = 2\rho$ , η ΚΛ θα είναι διάμετρος του κύκλου.

Οπότε το μέσο της ΚΛ θα είναι το κέντρο  $\Theta$  του κύκλου  $C : x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16 = 0$ .

Επομένως η ΟΘ διάμεσος του τριγώνου ΟΚΛ.

Άρα

$$|\overline{OK} + \overline{OL}| = |2\overline{O\Theta}| = 2\sqrt{3^2 + 4^2} = 10$$