ΤΑΞΗ: **Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Τρίτη 7 Ιανουαρίου 2020
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. **α)** Να αποδείξετε ότι: αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 5

β) Με τη βοήθεια της συνάρτησης $f(x)=|x|$,να αποδείξετε ότι δεν ισχύει το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης.

Μονάδες 3

Α2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της ;

Μονάδες 3

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό** ,αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

Στα ερωτήματα γ, ε να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α) Αν μία συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι συνάρτηση "$1-1$".

Μονάδες 2

β) $\lim\limits_{x\to 0}\ln x = +\infty$.

Μονάδες 2

γ) $|\eta\mu x| < x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 4

δ) Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$,τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μία μέγιστη τιμή M και μία ελάχιστη m.

Μονάδες 2

ε) Αν για τη συνάρτηση f ισχύει το Θεώρημα Bolzano στο $[\alpha,\beta]$, τότε ισχύει και το Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών στο $[\alpha,\beta]$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Β

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} e^x, x\geq 0 \\ \alpha x+\beta, x<0 \end{cases}$, α,β $\in\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g(x)=\ln x, x>0$. Να αποδείξετε ότι:

Β1. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-1}{x}=\left.\dfrac{de^x}{dx}\right|_{x=0}=1$.

Μονάδες 5

Β2. $f(x)=\begin{cases} e^x, x\geq 0 \\ x+1, x<0 \end{cases}$ και με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της f να βρείτε τη μονοτονία της.

Μονάδες 9

Β3. $h(x)=(fog)(x)=\begin{cases} x, x\geq 1 \\ \ln x+1, 0<x<1 \end{cases}$.

Μονάδες 6

Β4. Η h αντιστρέφεται και να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\left|h^{-1}\right|$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^{2x}+x-1, x\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το πρόσημό της.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3f(x)-5}{2f(x)}$.

Μονάδες 5

Γ3. **α)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f^{-1} ορίζεται και μάλιστα στο $\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι η $h(x)=\left(e^{f^{-1}(x)}\right)^2+f^{-1}(x)-x$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 8

Γ4. Να εξετάσετε αν η ευθεία $(\varepsilon): y=3f^{-1}\left(e^2\right)x$, εφάπτεται της C_f.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία είναι τέτοια ώστε:

$$f\left(\frac{x}{e}\right)+1-\frac{x}{e}\le \ln x\le f(x)-x \text{ ,για κάθε } x\in(0,+\infty).$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\ln x+x, x\in(0,+\infty)$.

Μονάδες 6

Δ2. Να λύσετε την ανίσωση: $x\ln x<1-x$ και να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(f(\eta\mu x)-f(x)\right)$.

Μονάδες 8

Δ3. Να αποδείξετε ότι η f έχει ακριβώς μία ρίζα, έστω $x_0\in(0,1)$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)=f\left(f(x)\right)-2(x-1)$.

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη 1.

Μονάδες 5