



ΤΑΞΗ: Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 24 Μαΐου 2020
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία από το Σχολικό Βιβλίο σελ 135.

A2.

1. Λ
2. Λ
3. Λ
4. Σ
5. Σ

A3.

- A → 4
B → 2
Γ → 1
Δ → 5
E → 3

ΘΕΜΑ Β'

B1.

$$\varepsilon\varphi(\pi - x) = -\varepsilon\varphi x$$

$$\sigma\upsilon\nu(2\pi + x) = \sigma\upsilon\nu x$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{9\pi}{2} + x\right) = \sigma\upsilon\nu\left(4\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = -\eta\mu x$$

$$\eta\mu(13\pi + x) = \eta\mu(12\pi + \pi + x) = -\eta\mu x$$

$$\sin(-x) = \sin x$$

$$\sigma\varphi\left(\frac{21\pi}{2} + x\right) = \sigma\varphi\left(10\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = -\varepsilon\varphi x$$

$$A = \frac{(-\varepsilon\varphi x) \cdot \sin x \cdot (-\eta\mu x)}{(-\eta\mu x) \cdot \sin x \cdot (-\varepsilon\varphi x)} = 1$$

B2.

$$f(x) = 6\eta\mu 2x$$

$$\alpha\text{φού } -1 \leq \eta\mu 2x \leq 1$$

$$-6 \leq 6\eta\mu 2x \leq 6$$

Μέγιστη Τιμή: 6

$$\text{Περίοδος: } T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

B3.

$$f(x) = 3$$

$$6\eta\mu 2x = 3$$

$$\eta\mu 2x = \frac{1}{2}$$

$$\eta\mu 2x = \eta\mu \frac{\pi}{6}$$

$$2x = 2κπ + \frac{\pi}{6} \text{ ή } 2x = 2κπ + \pi - \frac{\pi}{6}$$

$$x = κπ + \frac{\pi}{12} \text{ ή } x = κπ + \frac{5\pi}{12} \quad κ \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{array}{l|l} x \in [-\pi, \pi] & x \in [-\pi, \pi] \\ -\pi \leq κπ + \frac{\pi}{12} \leq \pi & -\pi \leq κπ + \frac{5\pi}{12} \leq \pi \end{array}$$

$$-\frac{13\pi}{12} \leq \kappa\pi \leq \frac{11\pi}{12}$$

$$-\frac{13}{12} \leq \kappa \leq \frac{11}{12}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\kappa = -1 \text{ ή } \kappa = 0$$

$$\kappa = -1 \text{ τότε } x = -\frac{11\pi}{12}$$

$$\kappa = 0 \text{ τότε } x = \frac{\pi}{12}$$

$$-\frac{17\pi}{12} \leq \kappa\pi \leq \frac{7\pi}{12}$$

$$-\frac{17}{12} \leq \kappa \leq \frac{7}{12}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\kappa = -1 \text{ ή } \kappa = 0$$

$$\kappa = -1 \text{ τότε } x = -\frac{7\pi}{12}$$

$$\kappa = 0 \text{ τότε } x = \frac{5\pi}{12}$$

B4.

$$(1 + \eta\mu x)(2 + 2\sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x)(6\eta\mu 2x + 6\sigma\upsilon\nu 2x) = 0$$

$$\text{Τότε } 1 + \eta\mu x = 0$$

$$\eta\mu x = -1$$

$$\eta\mu x = \eta\mu \frac{3\pi}{2}$$

$$x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2} \text{ ή } x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ή το } 2 + 2\sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x = 0$$

$$\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$x = 2\kappa\pi \pm \frac{3\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Η το } 6\eta\mu 2x + 6\sigma\upsilon\nu 2x = 0$$

$$6\eta\mu 2x = -6\sigma\upsilon\nu 2x$$

$$\eta\mu 2x = \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right)$$

$$2x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} - 2x \quad \text{ή} \quad 2x = 2k\pi + \pi - \frac{3\pi}{2} + 2x: \text{αδύνατη}$$

$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ΘΕΜΑ Γ'
Γ1.Α' ΤΡΟΠΟΣ

$$\text{Έστω } y = ax + \beta$$

Το σημείο A(0,6) ανήκει στην ευθεία άρα $6 = \beta$

Το σημείο B(-2,0) ανήκει στην ευθεία οπότε

$$0 = -2a + 6$$

$$a = 3$$

Β' ΤΡΟΠΟΣ

Χρησιμοποιώ τον τύπο:

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 6}{-2 - 0} = 3$$

και η εξίσωση θα είναι:

$$y - y_0 = \lambda \cdot (x - x_0)$$

$$y - 0 = 3(x + 2)$$

$$y = 3x + 6$$

Γ2. Λύνω την εξίσωση $f(x) = y$

$$x^4 - x^3 + x^2 = 3x + 6$$

$$x^4 - x^3 + x^2 - 3x - 6 = 0$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 & -6 & 2 \\ \downarrow & 2 & 2 & 6 & 6 & \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 0 & \end{array}$$

$$(x - 2) \cdot (x^3 + x^2 + 3x + 3) = 0$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & -1 \\ \downarrow & -1 & 0 & -3 & \\ 1 & 0 & 3 & 0 & \end{array}$$

$$(x - 2) \cdot (x + 1) \cdot (x^2 + 3) = 0$$

$$x = 2 \text{ ή } x = -1 \text{ ή } x^2 = -3 \text{ αδύνατη}$$

Για $x = 2$, $y = 12$ και για $x = -1$, $y = -9$
Επομένως τα σημεία τομής είναι τα $A(2,12)$ $B(-1,3)$

Γ3. Για να ορίζεται η $h(x)$ αρκεί $f(x) > 3x + 6$

1ος Τρόπος Αλγεβρικά

$$\text{Γνωρίζω ότι: } f(x) - y = (x - 2) \cdot (x + 1) \cdot (x^2 + 3)$$

	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$x-2$	-	-	•	+	
$x+1$	-	•	+	+	
x^2+3	+	+	+	+	
γινόμενο	+	•	-	•	+

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h είναι:

$$A = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$$

2ος Τρόπος Γραφικά

Παρατηρώ από το σχήμα ότι η C_f είναι “πάνω” από την ευθεία (ε) όταν $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ άρα $A = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

Γ4. i) Το υπόλοιπο της διαίρεσης

$$f(x): (x-1) \text{ είναι } v = f(1) \quad \text{και} \quad Q(x): (x-1) \text{ είναι } v = Q(1)$$

Άρα,

$$\begin{aligned} f(1) &= Q(1) \\ 1 &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + a \\ a &= 1 \end{aligned}$$

ii) $\frac{x^4 - x^3 + x^2}{-\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 1} \geq 0 \Leftrightarrow (x^4 - x^3 + x^2) \left(-\frac{x^4}{2} + \frac{x^2}{2} + 1 \right) \geq 0 \quad (1)$

$$\begin{aligned} \text{πρέπει } -\frac{x^4}{2} + \frac{x^2}{2} + 1 &= \frac{-x^4 + x^2 + 2}{2} \neq 0 \Leftrightarrow \\ \frac{1 - x^4 + x^2 + 1}{2} &\neq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } (1 - x^2)(1 + x^2) + x^2 + 1 \neq 0 \Leftrightarrow (2 - x^2)(1 + x^2) \neq 0$$

$$\text{Οπότε } 1 + x^2 \neq 0 \text{ που ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } 2 - x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm\sqrt{2}$$

Επίσης

$$x^4 - x^3 + x^2 = x^2(x^2 - x + 1)$$

$$\text{Άρα η (1) γίνεται: } x^2(x^2 - x + 1) \frac{(1+x^2)(2-x^2)}{2} \geq 0$$

$$x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$x^2 - x + 1 = 0, \Delta < 0 \text{ άρα αδύνατη.}$$

	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$+\sqrt{2}$	$+\infty$
x^2	+	+	+	+	+
$x^2 - x + 1$	+	+	+	+	+
$x^2 + 1$	+	+	+	+	+
$2 - x^2$	-	+	+	-	-
Γινόμενο	-	+	+	-	-

$$\text{Άρα, } x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

ΘΕΜΑ Δ

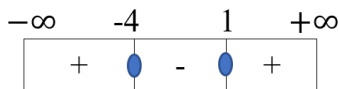
Δ1. Πρέπει $e^x + 3 - 4e^{-x} > 0 \Leftrightarrow e^x + 3 - \frac{4}{e^x} > 0$

$$\frac{e^{2x} + 3e^x - 4}{e^x} > 0$$

Επειδή $e^x > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $e^{2x} + 3e^x - 4 > 0$

Θέτω $e^x = \omega$, $\omega > 0$, άρα έχουμε $\omega^2 + 3\omega - 4 > 0$.

Οι ρίζες της αντίστοιχης εξίσωσης $\omega^2 + 3\omega - 4 = 0$ είναι $\omega_1 = -4$ και $\omega_2 = 1$.



Άρα $\omega < -4$ απορρίπτεται, $\omega > 1 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$

Άρα $Af = (0, +\infty)$

Δ2. $f(x) = \ln(e^x + 3 - 4e^{-x}) = \ln\left(e^x + 3 - \frac{4}{e^x}\right) = \ln\left(\frac{e^{2x} + 3e^x - 4}{e^x}\right) =$
 $\ln(e^{2x} + 3e^x - 4) - \ln e^x = \ln(e^{2x} + 3e^x - 4) - x, x > 0$

Δ3. $f(x) \leq x$, για $x > 0$ (1) έχουμε :

$$\ln(e^{2x} + 3e^x - 4) - x \leq x \Leftrightarrow$$

$$\ln(e^{2x} + 3e^x - 4) \leq 2x \Leftrightarrow$$

$$\ln(e^{2x} + 3e^x - 4) \leq \ln e^{2x} \Leftrightarrow$$

$$e^{2x} + 3e^x - 4 \leq e^{2x} \Leftrightarrow$$

$$3e^x - 4 \leq 0 \Leftrightarrow e^x \leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow x \leq \ln \frac{4}{3} \quad (2)$$

$$\left(\frac{4}{3} > 1 \Leftrightarrow \ln \frac{4}{3} > 0\right)$$

Από (1) και (2) έχουμε $0 < x \leq \ln \frac{4}{3}$

Δ4.

- $f(\ln 2) = \ln\left(e^{\ln 2} + 3 - \frac{4}{e^{\ln 2}}\right) = \ln\left(2 + 3 - \frac{4}{2}\right) = \ln 3$
- $f(\ln 3) = \ln\left(e^{\ln 3} + 3 - \frac{4}{e^{\ln 3}}\right) = \ln\left(3 + 3 - \frac{4}{3}\right) = \ln \frac{14}{3}$

Επειδή $\frac{14}{3} > 3 \xrightarrow{\ln \nearrow} \ln \frac{14}{3} > \ln 3 \Leftrightarrow$

$$f(\ln 2) - f(\ln 3) < 0$$