

**ΤΑΞΗ:** Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΑΛΓΕΒΡΑ/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

**Ημερομηνία: Σάββατο 12 Ιανουαρίου 2019**  
**Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες**

### ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

#### ΘΕΜΑ Α

- A1.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 60
- A2.** α. Λάθος β. Λάθος γ. Σωστό δ. Σωστό ε. Λάθος
- A3.** 1. Γ 2. Β 3. Ζ 4. Ε

#### ΘΕΜΑ Β

**B1.** Η  $f$  ως πολυωνυμική ορίζεται για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  άρα το πεδίο ορισμού της είναι  $D_f = \mathbb{R}$ .

Το πεδίο ορισμού είναι συμμετρικό ως προς το μηδέν. Έτσι αν  $x \in D_f$  και το  $-x \in D_f$ .

Θέτουμε όπου  $x$  το  $-x$  και έχουμε:

$$f(-x) = \alpha(-x)^4 + \beta(-x)^2 = \alpha x^4 + \beta x^2 = f(x)$$

Άρα η  $f$  είναι άρτια.

**B2.** Αφού η  $f$  διέρχεται από τα σημεία  $A(2,4)$  και  $B(1,1)$  τότε:

$$\begin{cases} f(2) = 4 \\ f(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \cdot 2^4 + \beta \cdot 2^2 = 4 \\ \alpha \cdot 1^4 + \beta \cdot 1^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16\alpha + 4\beta = 4 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\alpha + \beta = 1 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4\alpha - \beta = -1 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow -3\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

Για  $\alpha = 0$  η  $\alpha + \beta = 1$  γίνεται  $0 + \beta = 1 \Leftrightarrow \beta = 1$

**B3.** Όπως προκύπτει από τη γραφική παράσταση η συνάρτηση είναι:

Γνησίως φθίνουσα για κάθε  $x \in (-\infty, -3]$

Γνησίως αύξουσα για κάθε  $x \in [-3, +\infty)$

Για  $x = -3$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το  $f(-3) = 1$

**B4.** Αφού η  $C_3$  είναι μετατόπιση της  $f(x) = x^2$  της οποίας η γραφική παράσταση είναι η  $C_1$  τότε βλέπουμε ότι είναι μετατοπισμένη κατά 2 προς τα δεξιά και 2 προς τα επάνω. Άρα η συνάρτηση που περιγράφει η  $C_3$  είναι η  $f(x-2) + 2 = (x-2)^2 + 2 = x^2 - 4x + 4 + 2 = x^2 - 4x + 6 = g(x)$ .

Άρα η  $C_2$  είναι η γραφική παράσταση της  $h(x)$ .

### ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Έχουμε,

$$\begin{aligned} A(x) &= \sigma\upsilon\nu^4 x - \eta\mu^4 x - 2\sigma\upsilon\nu^2 x \\ &= (\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x)(\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x) - 2\sigma\upsilon\nu^2 x \\ &= \sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x - 2\sigma\upsilon\nu^2 x = -\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x \\ &= -(\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x) = -1 \end{aligned}$$

**Γ2.** Έχουμε,

$$\bullet \sigma\upsilon\nu(3\pi - x) = \sigma\upsilon\nu(2\pi + \pi - x) = \sigma\upsilon\nu(\pi - x) = -\sigma\upsilon\nu x$$

$$\bullet \sigma\upsilon\nu(3\pi + x) = \sigma\upsilon\nu(2\pi + \pi + x) = \sigma\upsilon\nu(\pi + x) = -\sigma\upsilon\nu x$$

$$\bullet \sigma\upsilon\nu(4\pi - x) = \sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x$$

$$\bullet \eta\mu\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) = \eta\mu\left(4\pi - \frac{\pi}{2} + x\right) = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) = -\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sigma\upsilon\nu x$$

$$\bullet \epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\varphi x$$

$$\bullet \sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \sigma\varphi\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \varepsilon\varphi x$$

Άρα,

$$B(x) = \frac{(-\sigma\upsilon\nu x)^2 + (-\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu x) + (-\sigma\upsilon\nu x)^2}{\sigma\varphi x \cdot \varepsilon\varphi x} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{1} = \sigma\upsilon\nu^2 x$$

**Γ3.** Η δοθείσα εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu^2 x - (-1) &= \frac{7}{2} \eta\mu x \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2 x + 2 = 7\eta\mu x \\ \Leftrightarrow 2(1 - \eta\mu^2 x) + 2 &= 7\eta\mu x \Leftrightarrow 2 - 2\eta\mu^2 x + 2 - 7\eta\mu x = 0 \\ \Leftrightarrow 2\eta\mu^2 x + 7\eta\mu x - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Θέτουμε  $\eta\mu x = \omega$ ,  $\omega \in [-1, 1]$  και η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned} 2\omega^2 + 7\omega - 4 = 0 &\Leftrightarrow \omega = \frac{-7+9}{4} \text{ ή } \omega = \frac{-7-9}{4} \\ \Leftrightarrow \omega = \frac{2}{4} \text{ ή } \omega = -\frac{16}{4} &\Leftrightarrow \omega = \frac{1}{2} \text{ ή } \omega = -4 \end{aligned}$$

Έχουμε ότι,

$$\eta\mu x = \frac{1}{2} \text{ ή } \eta\mu x = -4 \text{ (απορρίπτεται)}$$

Οπότε,  $\eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\left(\frac{\pi}{6}\right)$  και οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται από τους τύπους:

$$x = \begin{cases} 2κπ + \frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ 2κπ + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \text{ με } κ \in \mathbb{Z}$$

Όμως οι λύσεις πρέπει να ανήκουν στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ , δηλαδή:

$$\begin{aligned} \bullet \quad x \in [0, 2\pi] &\Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq 2k\pi + \frac{\pi}{6} \leq 2\pi \\ &\Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} \leq 2k\pi \leq \frac{11\pi}{6} \Leftrightarrow -\frac{1}{12} \leq k \leq \frac{11}{12} \end{aligned}$$

Όμως  $k \in \mathbb{Z}$ , άρα  $k = 0$  και η λύση της εξίσωσης είναι η  $x = \frac{\pi}{6}$ .

$$\begin{aligned} \bullet \quad x \in [0, 2\pi] &\Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \leq 2\pi \\ &\Leftrightarrow -\frac{5\pi}{6} \leq 2k\pi \leq \frac{7\pi}{6} \Leftrightarrow -\frac{5}{12} \leq k \leq \frac{7}{12} \end{aligned}$$

Όμως  $k \in \mathbb{Z}$ , άρα  $k = 0$  και η λύση της εξίσωσης είναι η  $x = \frac{5\pi}{6}$ .

Γ4. Για κάθε  $x \neq \frac{k\pi}{2}$ , με  $k \in \mathbb{Z}$  έχουμε:

$$B^2(x) + B(x) > B\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2A(x)$$

$$\Leftrightarrow (\sin^2 x)^2 + \sin^2 x > \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2(-1)$$

$$\Leftrightarrow (\sin^2 x)^2 + \sin^2 x > \eta\mu^2 x - 2$$

$$\Leftrightarrow (\sin^2 x)^2 + \sin^2 x > 1 - \sin^2 x - 2$$

$$\Leftrightarrow (\sin^2 x)^2 + 2\sin^2 x + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin^2 x + 1)^2 > 0, \text{ που ισχύει για κάθε } x \neq \frac{k\pi}{2}, \text{ με } k \in \mathbb{Z}, \text{ διότι } \sin^2 x + 1 \neq 0.$$

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.** • Επειδή η  $f$  διέρχεται από το σημείο  $A(0,1)$  ισχύει:  $f(0) = 1 \Rightarrow \gamma = 1$

Αν θεωρήσουμε  $g(x) = (a-1) \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{2\beta}x\right)$  τότε παρουσιάζει μέγιστο τον αριθμό  $|a-1|$ . Άρα η γραφική παράσταση της  $f$ , η οποία είναι μετατοπισμένη κατά μία μονάδα προς τα πάνω της γραφικής παράστασης της  $g$ , θα παρουσιάζει μέγιστο τον αριθμό  $|a-1|+1$ .

•  $\max f = 3 \Leftrightarrow |a-1| + \gamma = 3 \xRightarrow{\gamma=1} |a-1| + 1 = 3 \Rightarrow |a-1| = 2$

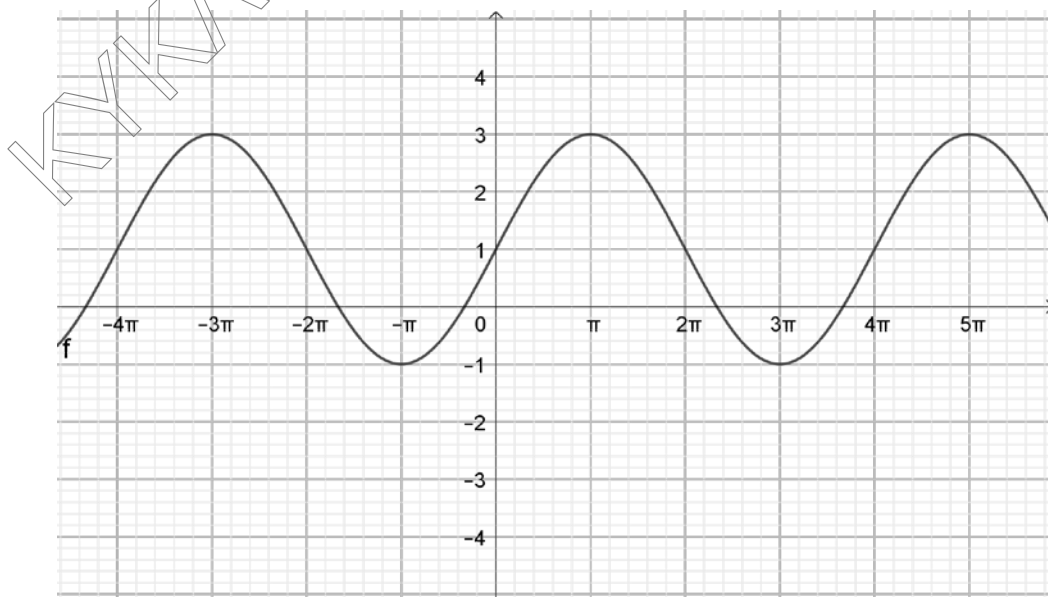
$a-1 = 2$  ή  $a-1 = -2$

$a = 3$  δεκτή  $a = -1$  απορρίπτεται αφού  $a > 0$

$a = 3$  δεκτή  $a = -1$  απορρίπτεται αφού  $a > 0$

•  $T = 4\pi \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2\beta}} = 4\pi \Leftrightarrow 4\beta = 4\pi \Leftrightarrow \beta = \pi$ , άρα  $f(x) = 2\eta\mu\left(\frac{x}{2}\right) + 1$

**Δ2.** Αν  $g(x) = 2\eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)$  τότε η γραφική παράσταση της  $f$  προκύπτει αν μετατοπίσουμε την  $f$  μία μονάδα προς τα πάνω.



Δ3.  $\frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{7} < \frac{6\pi}{7} < \pi$  και επειδή η  $\eta\mu x$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  άρα

$1 > \eta\mu \frac{5\pi}{7} > \eta\mu \frac{6\pi}{7} > 0$  και επειδή η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[0, \pi]$  τελικά

προκύπτει  $f\left(\eta\mu \frac{5\pi}{7}\right) > f\left(\eta\mu \frac{6\pi}{7}\right)$ .

Δ4. •  $f(0) = 1$

•  $f\left(\frac{25\pi}{3}\right) = 2\eta\mu\left(\frac{25\pi}{6}\right) + 1 = 2\eta\mu\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 2\eta\mu \frac{\pi}{6} + 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 2$

άρα το σύστημα γίνεται  $\begin{cases} y^2 - 3x^2 = 4 \\ y = x^2 \end{cases}$

$$y^2 - 3x^2 = 4 \xrightarrow{y=x^2} (x^2)^2 - 3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

Θέτω  $x^2 = \omega$ ,  $\omega \geq 0$ , άρα  $\omega^2 - 3\omega - 4 = 0$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$$

άρα  $\omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{3 \pm 5}{2}$ ,  $\omega_1 = 4$  δεκτή,  $\omega_2 = -1$  απορρίπτεται

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

• αν  $x = 2$  τότε  $y = 2^2 = 4$ , άρα  $(x, y) = (2, 4)$

• αν  $x = -2$  τότε  $y = (-2)^2 = 4$ , άρα  $(x, y) = (-2, 4)$