ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΑΛΓΕΒΡΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

Ημερομηνία: Σάββατο 11 Μαΐου 2019
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 141.

Α2. **α.** Λάθος, **β.** Λάθος, **γ.** Σωστό, **δ.** Λάθος, **ε.** Σωστό

Α3. **α** – 2, **β** – 3, **γ** – 4, **δ** – 1

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} P(1)=0 \\ P(2)=-7 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} -1^3+\alpha\cdot 1^2+(\beta-1)\cdot 1+7=0 \\ -2+\alpha\cdot 2^2+(\beta-1)\cdot 2+7=-7 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} -1+\alpha+\beta-1+7=0 \\ -8+4\alpha+2\beta-2+7=-7 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \alpha+\beta=-5 \\ 4\alpha+2\beta=-4 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha+\beta=-5 \\ 2\alpha+\beta=-2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \alpha=-\beta-5 \\ 2(-\beta-5)+\beta=-2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha=-\beta-5 \\ -2\beta-10+\beta=-2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \alpha=-\beta-5 \\ \beta=-8 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \alpha=3 \\ \beta=-8 \end{aligned}\right\}$$

Β2. Έχουμε, $P(x) = -x^3 + 3x^2 - 9x + 7$.

Η x=1 είναι ρίζα του P(x), από σχήμα Horner έχουμε:

-1	3	-9	7	1
	-1	2	-7	
-1	2	-7	0	

Έτσι $P(x) = (x-1)(-x^2 + 2x - 7)$

Η $-x^2 + 2x - 7 = 0$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$ γιατί
$\Delta = 4 - 4(-1)(-7) = 4 - 28 = -24 < 0$

Συντάσσουμε τον πίνακα προσήμου του γινομένου:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
x-1	-	0	+
$-x^2 + 2x - 7$	-		-
P(x)	+		-

Άρα, η $P(x) > 0$ έχει λύση για κάθε $x \in (-\infty, 1)$.

Β3. Εκτελούμε την διαίρεση :

$$
\begin{array}{l|l}
-x^3 + 3x^2 - 9x + 7 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2}
x^3 - x & -x + 3 \\ \cline{1-1}
3x^2 - 10x + 7 & \\
-3x^2 + 3 & \\ \cline{1-1}
-10x + 10 &
\end{array}
$$

άρα $\pi(x) = -x + 3$ και η ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης είναι
$-x^3 + 3x^2 - 9x + 7 = (x^2 - 1)(-x + 3) + (-10x + 10)$.

Β4. Έχουμε, $\pi(x+1) = -(x+1) + 3 = -x - 1 + 3 = -x + 2$

Άρα, $\pi(\pi(x+1)) = \pi(-x+2) = -(-x+2) + 3 = x - 2 + 3 = x + 1$

Οπότε,

$P(x) = \pi(\pi(x+1)) - 10 \Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 - 9x + 7 = x + 1 - 10 \Leftrightarrow$

$-x^3 + 3x^2 - 10x + 16 = 0$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι διαιρέτες: $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8, \pm16$ του σταθερού όρου. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner για $x = 2$ έχουμε

-1	3	-10	16	2
	-2	2	-16	
-1	1	-8	0	

Άρα, η εξίσωση γίνεται:

$-x^3 + 3x^2 - 10x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(-x^2 + x - 8) = 0 \Leftrightarrow$

$x = 2$ ή $-x^2 + x - 8 = 0$ αδύνατη αφού $\Delta = 1 - 4(-1)(-8) = 1 - 32 = -31 < 0$

Επομένως, μοναδική ρίζα της εξίσωσης είναι η $x = 2$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f ορίζεται για $x > 0$ και $1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow \ln x < \ln e \overset{\ln Z}{\Leftrightarrow} x < e$.

Άρα, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $D_f = (0, e)$.

Για να βρούμε σημεία τομής με τον x΄x λύνουμε την εξίσωση:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(1 - \ln x) = 0 \Leftrightarrow \ln(1 - \ln x) = \ln 1 \overset{1-1}{\Leftrightarrow} 1 - \ln x = 1 \Leftrightarrow$

$\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \ln 1 \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x = 1.$

Το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x είναι το A(1,0).

Γ2. Η g ορίζεται για $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ (1) και

$\frac{1-x}{1+x} > 0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ (2)

Από (1) και (2) προκύπτει ότι το πεδίο ορισμού της g είναι $D_g = (-1, 1)$.

Για κάθε $x \in D_g$ έχουμε $-x \in D_g$ και

$$g(-x) = \ln\frac{1+x}{1-x} = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1} = -\ln\frac{1-x}{1+x} = -g(x).$$

Επομένως, η g είναι περιττή στο D_g.

Γ3. Για κάθε $x \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$ έχουμε

$$f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = \ln(1-\ln x) - \ln\left(1-\ln\frac{1}{x}\right) = \ln(1-\ln x) - \ln\left(1-\ln x^{-1}\right) =$$

$$\ln(1-\ln x) - \ln(1+\ln x) = \ln\left(\frac{1-\ln x}{1+\ln x}\right) = g(\ln x)$$

Γ4. **1ος τρόπος**

Για κάθε $x \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$ έχουμε

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = g(\ln x) \overset{\Gamma 3}{\Leftrightarrow} f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(1-\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \ln 1 \overset{\text{"1–1"}}{\Leftrightarrow} 1 + \ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

2ος τρόπος

Για κάθε $x \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$ έχουμε:

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = g(\ln x) \Leftrightarrow \ln(1-\ln x) + \ln\left(1-\ln\frac{1}{x}\right) = \ln\frac{1-\ln x}{1+\ln x} \Leftrightarrow$$

$$\ln(1-\ln x) + \ln\left(1-\ln x^{-1}\right) = \ln\frac{1-\ln x}{1+\ln x} \Leftrightarrow \ln(1-\ln x) + \ln(1+\ln x) = \frac{\ln 1 - \ln x}{1+\ln x} \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(1-\ln^2 x\right) = \ln\frac{1-\ln x}{1+\ln x} \overset{1-1}{\Leftrightarrow} 1-\ln^2 x = \frac{1-\ln x}{1+\ln x} \Leftrightarrow \left(1-\ln^2 x\right)(1+\ln x) = 1-\ln x \Leftrightarrow$$

$$(1-\ln x)(1+\ln x)^2 - (1-\ln x) = 0 \Leftrightarrow (1-\ln x)\left(1^2 + 2\ln x + \ln^2 x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(1-\ln x)\left(2\ln x + \ln^2 x\right) = 0 \Leftrightarrow \ln x(2+\ln x)(1-\ln x) = 0$$

Άρα,

$$\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \ln 1 \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x = 1$$

ή

$$2 + \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -2 \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{-2} \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x = \frac{1}{e^2}$$ απορρίπτεται διότι

$$\frac{1}{e^2} \notin \left(\frac{1}{e}, e\right)$$

ή

$1-\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=\ln e \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x=e$ απορρίπτεται διότι $e \notin \left(\frac{1}{e}, e\right)$

Οπότε, x=1.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θέτουμε $\eta\mu\alpha=\omega$, με $-1\le\omega\le1$ και έχουμε :

$2\omega^2+3\omega+1=0 \Leftrightarrow \omega=-1$ ή $\omega=-\frac{1}{2}$.

Για $\omega=-1$ έχουμε $\eta\mu\alpha=-1 \Leftrightarrow \eta\mu\alpha=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \alpha=\begin{cases}2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}\\ 2\kappa\pi+\frac{3\pi}{2}\end{cases}, \kappa\in\mathbb{Z}$

Επειδή $\alpha\in[0,2\pi]$ τότε $\alpha_1=\frac{3\pi}{2}$.

Για $\omega=-\frac{1}{2}$ έχουμε $\eta\mu\alpha=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\alpha=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \alpha=\begin{cases}2\kappa\pi-\frac{\pi}{6}\\ 2\kappa\pi+\frac{7\pi}{6}\end{cases}, \kappa\in\mathbb{Z}$

Επειδή $\alpha\in[0,2\pi]$ τότε $\alpha_2=\frac{7\pi}{6}$, $\alpha_3=\frac{11\pi}{6}$.

Δ2. Έχουμε,

$-1\le\eta\mu\alpha\le1 \Leftrightarrow -2\le2\eta\mu\alpha\le2 \Leftrightarrow 2-2\le2\eta\mu\alpha+2\le2+2 \Leftrightarrow 0\le2\eta\mu\alpha+2\le4$

Για να είναι εκθετική η f πρέπει :

$\begin{cases}2\eta\mu\alpha+2>0 \ (1)\\ 2\eta\mu\alpha+2\neq1 \ (2)\end{cases}$

Ξέρουμε ότι $2\eta\mu\alpha+2\ge0$, άρα για να έχει λύση η (1) πρέπει

$2\eta\mu\alpha+2\neq0 \Leftrightarrow \eta\mu\alpha\neq-1 \Leftrightarrow \alpha\neq\frac{3\pi}{2}$

$(2) \Leftrightarrow 2\eta\mu\alpha + 2 \neq 1 \Leftrightarrow \eta\mu\alpha \neq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{7\pi}{6}$ και $\alpha \neq \frac{11\pi}{6}$

Άρα, για $\alpha \neq \frac{3\pi}{2}$, $\alpha \neq \frac{7\pi}{6}$ και $\alpha \neq \frac{11\pi}{6}$ η f είναι εκθετική.

Δ3. Επειδή η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ τότε

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \Leftrightarrow (2\eta\mu\alpha + 2)^{\frac{1}{2}} = 2 \Leftrightarrow 2\eta\mu\alpha + 2 = 4 \Leftrightarrow \eta\mu\alpha = 1$$

Άρα, ο τύπος της f είναι $f(x) = 4^x, x \in \mathbb{R}$.

i. Έχουμε,

$$f(\sigma\upsilon\nu x) + 2f(-\sigma\upsilon\nu x) = f(\log_4 3) \Leftrightarrow 4^{\sigma\upsilon\nu x} + 2 \cdot 4^{-\sigma\upsilon\nu x} = 4^{\log_4 3} \Leftrightarrow$$

$$4^{\sigma\upsilon\nu x} + 2 \cdot 4^{-\sigma\upsilon\nu x} = 3 \Leftrightarrow 4^{\sigma\upsilon\nu x} + 2 \cdot 4^{-\sigma\upsilon\nu x} - 3 = 0$$

Θέτουμε $4^{\sigma\upsilon\nu x} = \omega > 0$ και η εξίσωση γίνεται :

$$\omega + 2\omega^{-1} - 3 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 - 3\omega + 2 = 0 \Leftrightarrow \omega_1 = 1 \text{ ή } \omega_2 = 2$$

Για $\omega_1 = 1$ έχουμε:

$$4^{\sigma\upsilon\nu x} = 1 \Leftrightarrow 4^{\sigma\upsilon\nu x} = 4^0 \overset{1-1}{\Leftrightarrow} \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \begin{cases} 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \\ 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Για $\omega_2 = 2$ έχουμε:

$$4^{\sigma\upsilon\nu x} = 2 \Leftrightarrow 4^{\sigma\upsilon\nu x} = 4^{\frac{1}{2}} \overset{1-1}{\Leftrightarrow} \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \begin{cases} 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \\ 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

ii. Για $x > 0$ έχουμε :

$$f(\ln x) + f(2\ln x) < \ln e^{f\left(\frac{1}{2}\right)} \Leftrightarrow 4^{\ln x} + 4^{2\ln x} < f\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 4^{\ln x} + 4^{2\ln x} < 2 \Leftrightarrow$$

$$4^{\ln x} + 4^{2\ln x} - 2 < 0 \Leftrightarrow \left(4^{\ln x}\right)^2 + 4^{\ln x} - 2 < 0$$

Θέτουμε $4^{\ln x} = \omega > 0$ και η ανίσωση γίνεται : $\omega^2 + \omega - 2 < 0$

ω	$-\infty$	-2		0		1		$+\infty$
$\omega^2+\omega-2$		0			$-$	0	$+$	

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στο παραπάνω πίνακα. Επομένως έχουμε $\omega^2 + \omega - 2 < 0 \Leftrightarrow \omega \in (0,1)$. Άρα,

$$0 < 4^{\ln x} < 1 \Leftrightarrow 4^{\ln x} < 4^0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < \ln 1 \Leftrightarrow x < 1.$$

Άρα, η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x \in (0,1)$.

iii. Έχουμε,

$$\begin{cases} \log_4 f(x^2) + \log_4 f(y^2) = 25 \\ x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_4 4^{x^2} + \log_4 4^{y^2} = 25 \\ x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = 7 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (7-x)^2 = 25 \\ y = 7 - x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + 49 - 14x + x^2 = 25 \\ y = 7 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 14x + 24 = 0 \\ y = 7 - x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 12 = 0 \\ y = 7 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \quad ή \quad x = 3 \\ y = 7 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \quad ή \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

Άρα οι λύσεις του συστήματος είναι τα ζεύγη $(4,3)$ και $(3,4)$.